TRIGONOMETRIA SFERICA

DI

ARCANGELO SCOTTO LACHIANCA

PROFESSORE DI MATEMATICHE E DI NAVIGAZIONE

NELLA PUBBLICA SCUOLA NAUTICA DI PROCIDA

Data alle stampe a spesa dell' Autore, e dell' avvocato
Cesare d' Amico.

NAPOLI
DAI TORCHI DEL TRAMATER
Strada Pallonetto S. Chiara n.° 8.

1836.

AVVISO

Qualunque copia debba essere segnata della cifra dell'autore, come qui sotto. Quella che non lo sarà, debba essere riguardata come contrafatta, e fraudolenta.

A SUA ECCELLENZA

IL SEGR.º DI STATO MINISTRO DEGLI AFFARI INTERNI

NICOLA SANTANGELO

CAV. GRAN CROCE DEL R. ORDINE DI FRANCESCO I.

IN ATTESTATO DI AMMIRAZIONE, E DI RICONOSCENZA

PER LA GENEROSA PROTEZIONE, DI CUI ONORA

LE SCIENZE, LE ARTI, ED IL COMMERCIO DEL REGNO

QUESTA TRIGONOMETRIA SFERICA

ARCANGELO SCOTTO LA CHIANCA, E CESARE D' AMICO

DEVOTAMENTE CONSACRANO

AL CORTESE LEGGITORE.

Appena, che mi vidi onorato della Cattedra di matematiche elementari, e di navigazione nella Pubblica Scuola Nautica di Procida, spinto dal desiderio di contribuire alla prosperità del Commercio marittimo, per quanto le mie deboli forze lo permettevano, mi accinsi a comporre un trattato di navigazione, che fra breve sarà dato alle stampe.

Riflettendo poi, che per istituire un' artista scienziato ad eseguire con sufficiente buon successo l'onorevole mestiero a cui si addice, sembra bastare un corso di matematiche elementari, in cui esponendosi con chiarezza le teorie essenziali, e conducenti, si possa giungere allo scopo; ho creduto far cosa grata ad una classe tanto benemerita alla società di formare gli elementi di Trigonometria Sferica, che vi presento, col proponimento di rendere tale scienza di comune intelligenza, anche a coloro che sono appena iniziati nelle matematiche.

Compiacetevi accogliere questo mio qualunque siasi lavoro, come frutto delle mie buone intenzioni.

PROSPETTO

DEL DIVISAMENTO DATO ALLA MATERIA.

TRIGONOMETRIA SFERICA

SEZIONE I.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI

1. Dicesi Sfera una figura solida, descritta da un semicerchio, che si fà girare d'intorno al suo diametro, che rimane immobile, finchè ritorna nel luogo dal quale incominciò a muoversi.

2. L'asse della sfera è il diametro, che sta fermo, intorno al quale il mezzo cerchio generatore della sfera si gira. I poli della sfera sono gli estremi del suo asse. Il centro della sfera è il centro dello stesso mezzo cerchio. I raggi della sfera sono i raggi del mezzo cerchio medesimo. La superficie sferica è la superficie curva che termina la sfera. Finalmente il diametro della sfera è ogni linea retta che passa per lo centro della medesima, e dall'una, e dall' altra parte vien terminata dalla superficie sferica.

3. In qualunque modo si divide la sfera per mezzo di un piano, si ha per comune Sezione un cerchio. Poicchè sia la sfera $BFAE$ (fig. 1.) segata dal piano ABC, non procedente pel centro della sfera; si abbassi sù di tale piano dal punto O, centro della medesima, la perpendicolare OD; e presi nel perimetro della sezione ABC, i punti B,C,A, da' quali ai punti O, e D si congiungono le rette OB, OC, OA, DB, DC, e DA. Or essendo la OD perpendicolare al piano ABC; saranno retti gli angoli in D; e perciò i triangoli rettangoli ODB, ODC, ODA sono equilateri; poicchè hanno i lati OB, OC, OA uguali come raggi della sfera, il lato DO di comune, ed essendo i quadrati di BD, di DC, e di DA, le differenze trà li quadrati uguali di OB, di OC, e di OA, ed il quadrato di OD; saranno anche le rette BD, DC, e DA uguali trà loro: similmente si dimostra, che tutte le rette tirate dal punto D agl' infiniti punti del perimetro ABC sono uguali trà loro. Adunque la sezione ABC è un cerchio, ed il punto D n' è il centro. Se poi il piano segante la sfera passa pel centro della medesima, in tal caso, siccome

tutt' i punti del perimetro di tale sezione sono nella superficie sferica, sono essi equidistanti dal centro della sfera, perciò la sezione medesima è un cerchio, il di cui centro trovasi nel centro della sfera.

4. Quindi il centro di ogni cerchio, che rappresenta la sezione fatta in una sfera da un piano non procedente pel suo centro, è il punto in dove questo piano è incontrato dalla perpendicolare tirata sù di esso dal centro della sfera. Ed inoltre il quadrato del raggio di tale cerchio è quanto la differenza dei quadrati descritti, uno dal raggio della sfera, e l'altro dalla distanza di tale cerchio dal centro della sfera.

5. Dal che è manifesto, che i cerchi formati nella sfera si rendono maggiori, a misura, che diminuiscono le di loro distanze dal centro della sfera; e che il più grande di tali cerchi è quello formato dal piano procedente pel centro della sfera.

6. Quel diametro della sfera, ch' è perpendicolare al piano di un cerchio della sfera, dicesi Asse del cerchio: e gli estremi di tal diametro diconsi Poli del cerchio. Adunque i cerchi paralleli nella sfera hanno l'istesso asse, ed i medesimi poli.

7. I cerchi Massimi nella sfera, sono quei cerchi della medesima, che hanno il centro nel centro dell' istessa sfera. I cerchi minori sono quelli, che hanno il centro fuori del centro della sfera, cioè nel diametro della sfera perpendicolare al medesimo cerchio.

8. Per due punti della superficie sferica non diametralmente opposti, non vi può passare che un solo cerchio massimo, poichè il piano di questo dovendo passare anche per lo centro della sfera, viene a passare per trè punti, non posti per dritto, e perciò tale piano è di determinata posizione.

9. Due cerchi massimi intersecandosi in una linea retta, che passa pel centro comune di essi, si dividono scambievolmente per metà, e le di loro circonferenze si tagliano nella distanza di 180°.

10. Due cerchi massimi non possono avere un medesimo polo; altrimenti la congiungente un tal polo col loro centro comune, sarebbe perpendicolare a due piani non paralleli, lo che è impossibile. Inoltre se per un polo di un cerchio massimo, vi passa un'altro cerchio massimo, gli archi di questo, terminati da tale polo, e dalla circonferenza del primo sono di 90°. Dippiù se un cerchio massimo passa per li poli di un' altro cerchio qualunque della sfera, divide questo in parti uguali, ed ad angoli retti, e viceversa. Finalmente se due cerchi massimi s' intersecano ad angoli retti nel polo di un cerchio qualunque della sfera medesima, questo sarà diviso dai primi in quattro quadranti.

11. Se due cerchi massimi tagliano un terzo cerchio massimo ad angoli retti, i primi s'intersecheranno in due punti della superficie sferica, che sono poli del terzo. Quindi un punto, che dista per 90° da più di un punto dalla circonferanze di un cerchio massimo, sarà un tale punto il polo di tale cerchio.

12. Il cerchio massimo divide la sfera in due emisferi, cioè per metà; ed il cerchio minore divide la sfera in due segmenti ineguali, de' quali è maggiore quello, che in se comprende il centro della sfera.

13. La misura della distanza di due punti della superficie sferica, è l' arco dell' unico cerchio massimo, che passa per tali punti; poicchè questo n' esprime la minima distanza di tali due punti, per essere l' arco del cerchio maggiore più piccola dell' arco del cerchio minore, allorchè tali archi vengono tagliati da linee rette uguali, ed anche perchè l' arco di cerchio massimo è la misura costante, unica, e naturale di ogni distanza tra' punti della superficie sferica.

14. Quindi si ottiene la distanza di uu punto della superficie sferica dalla circonferenza di un cerchio coll'arco di cerchio massimo, che passa per li poli di quello, frapposto trà il punto e la circonferenza dell' istesso cerchio.

15. Un cerchio massimo si dice essere di posizione determinata nella sfera, allorchè è noto il punto della circonferenza del cerchio, per li di cui poli esso passa. Un cerchio minore poi si dice di essere di determinata posizione nella sfera, allorchè è nota la distanza dalla circonferenza di tal cerchio da quel cerchio massimo, che gli è parallelo. Finalmente un punto della superficie sferica si dice essere di determinata posizione, se i due cerchi che in esso s' intersecano ad angoli retti sono di determinata posizione.

16. Quindi volendosi conoscere il sito di un punto della superficie sferica, vi bisogna la conoscenza de' due cerchi, che lo determinano, poicchè dove questi s' intersecano, ivi trovasi il punto.

17. L' angolo sferico è la scambievole inclinazione di due archi di cerchio massimo sulla superficie di una sfera, il quale dicesi Retto, se i due cerchi massimi, ai quali i due archi appartengono sono l' uno perpendicolare all' altro; si dice poi Ottuso, s' è maggior del retto; ed Acuto s' è minore del retto.

18. Il Triangolo sferico è la porzione della superficie della sfera, terminata dà trè archi di trè cerchi massimi; il quale si dice Rettangolo, se comprende uno, o più angoli retti, ed obbliquangolo, se niuno de' suoi angoli è retto.

19. Se in una sfera, come $AHBK$ (Fig. 2.) si tirino i cerchi massimi ABD, AED, AFB, i quali abbiano lo stesso diametro AB, gli angoli sferici in A, ed in B, che vengono formati dalle circonferenze di questi cerchi, saranno proporzionali agli archi DE, ed EF dall' altro cerchio massimo, che ha per asse AB, e che sono posti tra le circonferenze de' primi cerchi, cioè, l' angolo DAE stà all' altro EAF come l'arco DE sta altro EF. Poicchè preso l'arco $DC = DE$, e l'altro $FG = EF$, e per li punti G e C, facendovi passare gli altri cerchi massimi ACB, AGB, suppongasi muoversi i due cerchi ADB, ACB verso E; è chiaro che sè il punto C passi in D, il punto D passerà in E, e l'angolo sferico CAD combacerà coll'altro DAE, che perciò saranno uguali. Similmente si dimostra essere l' angolo GAF uguale all' altro FAE. Laonde l'angolo CAE, e l'arco CE saranno ugualmente multiplici dell' angolo DAE, e dell' arco DE, come pure l'angolo EAG e l'arco EG saranno ugualmente multiplici dell'angolo EAF, e dell' arco EF; ed è poi vero, che l'angolo CAE pareggerà, sarà maggiore, o minore dell'angolo EAG a misura che l'arco CE è maggiore, uguale, o minore dell'arco EG quindi $DAE : EAF :: DE : EF$.

20. Or gli archi DE, ed EF essendo proporzionali agli angoli DAE, ed EAF, potranno prendersi per loro misura, che perciò l'angolo DAE sarà di tanti gradi, e minuti, quanti ne contiene l'arco DE: ma dell' istesso numero di gradi, e minuti è l' angolo rettilineo DOE al centro del cerchio HEK, e questo dinotando l' inclinazione del cerchio BEA al cerchio BDA; si ricava perciò essere ogni angolo sferico dell' istesso numero di gradi, e minuti dell' inclinazione di due cerchi massimi della sfera, le di cui circonferenze comprendono l' angolo sferico. Ed inoltre se tirinsi ai cerchi ADB, AEB le tangenti AL, ed AM, pel punto A, perchè l' angolo LAM è quanto l' angolo DOE, si ricava altresì che l'angolo LAM contenuto dalle tangenti i lati di un' angolo sferico DAE nel vertice di esso, si può prendere per l'equivalente dell'angolo sferico.

21. Essendo di 360° l' intera circonferenza HEK (fig. 2.) i di cui archi misurano gli angoli d' inclinazione de' cerchi massimi, le di cui circonferenze contengono gli angoli sferici di qualunque numero, che vengono a formarsi in A, l' è chiaro, che tali angoli sferici dovranno, anche insieme presi essere uguali a 360°. Inoltre essendo A il polo del cerchio HEK, si ricava, che la misura dell' angolo sferico è l'arco di cerchio massimo, compreso trà i suoi lati, che ha per polo il vertice dell' angolo; colla stessa facilità, si potrebbe dimostrare, che

22. I. Gli angoli sferici verticali sono uguali. II. Gli angoli sferici

conseguenti sono uguali a due retti. III. Nel triangolo sferico isoscele, gli angoli alla base sono uguali trà loro. IV. Il triangolo sferico, che ha due angoli uguali ha pure uguali i lati, che oppongonsi ad essi. V. Un triangolo sferico, ch'è equilatero, è pure equiangolo; e se poi è equiangolo, sarà pure equilatero. VI. In ogni triangolo sferico, il maggior angolo e sotteso dal maggior lato, il minore dal minore: il maggior lato sottende l'angolo maggiore, ed il minore sottende il minore. VII. Due triangoli sferici di una stessa superficie sferica, se hanno due lati uguali a due lati, ciascuno a ciascuno, e l'angolo compreso dai primi uguale all'angolo compreso dai secondi, saranno tali triangoli, equilateri, equiangoli, ed eguali.

23. La trigonometria sferica dà le regole per risolvere sù i triangoli sferici quello stesso problema, che la trigonometria rettilinea risolve sù i triangoli rettilinei, cioè date trè quantità di quelle, che si dicono parti del triangolo sferico, non esclusi i trè angoli, determinare le tre parti rimanenti.

24. Essendo sei le parti d'un triangolo sferico trigonometricamente considerate, delle quali in ogni quistione ne debbono esser note trè, non esclusi i trè angoli, ne siegue, che le combinazioni delle parti note a trè per volta, dovrebbero essere venti. Ma di tali combinazioni, alcune contengono la stessa specie di parti, perciò le medesime possono ridursi a sei, e sono le seguenti.

I. Dati due lati, ed un'angolo opposto ad uno di essi, determinare il terzo lato, e gli altri due angoli.

II. Dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi, determinare il terzo angolo, e gli altri due lati.

III. Dati due lati, e l'angolo da essi compreso, determinare il terzo lato, e gli altri due angoli.

IV. Dati due angoli, ed il lato, ch'è adjacente, determinare il terzo angolo, e gli altri due lati.

V. Dati i trè lati, determinare i trè angoli.

VI. Dati i trè angoli, determinare i trè lati.

25. Per ben far comprendere la maniera di risolvere il triangolo sferico in qualunque delle sei distinte combinazioni, parleremo nella Sezione 2.ª delle proprietà principali de'lati, e degli angoli d'un triangolo sferico; nella Sezione 3.ª dei principj, onde dedurne per quant'è possibile la specie di un'angolo, o di un lato del triangolo sferico; nella Sezione 4.ª di alcune analogie, applicabili alla soluzione del triangolo sferico, sia rettangolo, sia obbliquangolo; nella Sezione 5.ª delle analo-

gie conducenti alla soluzione del triangolo sferico rettangolo; nella Sezione 6 delle analogie dirette alla soluzione del triangolo sferico obbliquangolo, nella Sezione 7.ª della pratica della soluzione del triangolo sferico rettangolo, e nella Sezione 8.ª della pratica della soluzione del triangolo sferico obbliquangolo.

SEZIONE II.

DELLE PROPRIETÀ PRINCIPALI DE' LATI, E DEGLI ANGOLI DEL TRIANGOLO SFERICO.

26. Nel triangolo sferico ogni lato è minore di 180°. Poicchè essendo CD, e DA (fig. 3.) due lati di un triangolo sferico, è manifesto, che per terminare un triangolo sferico, debbono questi essere segati da un terzo lato AC prima che si riuniscono di nuovo in B, nella distanza di 180° dal punto D (n. 9.)

27. La somma di due lati del triangolo sferico è sempre maggiore del terro. Di fatti sia ABC un triangolo sferico (fig. 4.). Si compia il cerchio ABD, e preso l' arco $BE = BC$, si tiri la corda EA, la quale incontri in F il diametro BD, e si uniscono le FC, CA. Or se il cerchio BED s' intenda rivolgersi intorno al suo diametro BD, finchè il punto E incontri l' altro C, conninciderà EF con FC, e gli sarà uguale. Or essendo le CF, FA, maggiori di CA, sarà pure la EA maggiore di CA, e quindi l' arco EBA, tagliato dalla prima, o sia $CB + BA$; dorrà essere maggiore dell' arco CA tagliato dall' ultima.

28. La somma di trè lati di un triangolo sferico è sempre minore di 360°. Poicchè nel triangolo sferico ADC (fig. 3), i di cui lati DA, DC si prolunghino fino all' incontrarsi di nuovo in B, essendo AC minore di $AB + BC$, ed $AB + BC = 360° - AD + DC$, sarà AC minore di $360° - AD + DC$, aggiuntovi di comune $AD + DC$, si avrà $AC + AD + DC$ minore di $360° - AD + DC + AD + DC$, cioè minore di 360°.

29. Quindi si potrà sempre supporre, che il triangolo sferico sia la base di un' angolo solido, che ha per vertice il centro della sfera, cui appartiene un tal triangolo, ed i cui angoli sono misurati dai lati di questo.

30. Se in un triangolo sferico, preso per polo ciascun vertice de' suoi angoli, si descrivono trè archi di cerchi massimi, quest' incontrandosi formeranno un' altro triangolo sferico, i cui lati saranno supplementi degli angoli del proposto, e gli angoli supplementi de' lati dello stesso

triangolo proposto. Di fatti descrittosi col polo A (fig. 5.) l'arco DE di cerchio massimo, è chiaro, che il punto E sarà distante per 90° dall'altro A, e descritto col polo B l'altro arco FE, anche di cerchio massimo, sarà lo stesso punto E anche a 90° di distanza da B, adunque il punto E sarà polo dell'arco AB (n. 11.). Per la stessa ragione D è il polo di AC, ed F il polo di BC. Ciò posto si prolunghi l'arco AB in G, e l'altro AC in H; or essendo $EG = 90° = DH$; sarà $EG + DH = 180° = DH + HE + GH = DE + GH$. Ma GH è misura dell'angolo sferico A, dunque DE è supplemento di A. Similmente si potrà dimostrare essere DF supplemento di C, ed FE supplemento di B.

II. Si prolunghi GA in L sarà GL misura dell'angolo in E. Ma $GA = 90° = BL$; e perciò $GA + BL$, cioè $GL + AB = 180°$. Adunque essendo GL supplemento di AB, sarà pure l'angolo E il supplemento di AB. Similmente si dimostrerà essere l'angolo F il supplemento di BC, e l'angolo D il supplemento di AC.

31. La somma di trè angoli di un triangolo sferieo è sempre maggiore di 180°, e minore di 540°; cioè maggioredi due, e minore di sei retti. Poicchè se la somma di trè angoli di un triangolo sferico non è maggiore di 180°, sarà la somma di tre lati del triangolo supplementale, uguale, o maggiore di 360° (n.° prec.), lo che è impossibile (n. 28). Adunque la somma di tali angoli, è sempre maggiore di 180°. Inoltre se la somma degli angoli di un triangolo sferico potesse pareggiare 540°, cioè sei retti; in tal caso almeno uno di essi, dovrebbe essere maggiore di due retti o ciascuno de' trè pareggiare due retti. E l'una, e l'altra cosa è impossibile, dapoicchè di questa stessa quantità dovrebbero essere gli angoli rettilinei, che rispettivamente li pareggiano.

32. Quindi prolungandosi uno de' lati del triangolo sferico, l'angolo esteriore è sempre minore de' due interiori, ed opposti; poicchè questi insieme col terzo angolo del triangolo fanno più di 180°, mentre l'istesso terzo angolo col suo conseguente esteriore è uguale a 180°.

33. Ed inoltre se un triangolo sferico ha un'angolo retto, gli altri due possono essere anche retti, o ottusi, o acuti, ma in questo ultimo caso, ciascuno di essi, o ambedue debbono essere maggiorii di 45° cioè che insieme presi debbono essere maggiori di 90°.

34. In ogni triangolo sferico la somma di due angoli è maggiore, uguale, o minore di due retti, secondochè la somma de' due lati opposti, è maggiore, uguale, o minore di 180°, e viceversa, poicchè nel triangolo ADC (fig. 3.) prolungati i lati DA, DC, finchè s'incontrino in B, sarà DAB di 180° (n. 9) e l'angolo in D uguale all'angolo in B

per essere ambedue uguali all'angolo d'inclinazione de' due piani DAB, DCB (n. 20.) I. È chiaro, che a misura che AD, ed AC insieme sono maggiori, uguali, o minore di 180°, così AC è maggiore, uguale, o minore di AB, e l'angolo in B, ovvero l'angolo in D, è maggiore, uguale, o minore di BCA; perciò se a' due ultimi angoli vi si aggiunga di comune l'angolo BCA, si avrà, che secondochè i lati AD, AC sono insieme maggiori, uguali, o minori di 180°, così i due angoli in D, e DCA, sono maggiori, uguali, o minori degli angoli ACD, ACB, ovvero di due retti. II. Ed è chiaro altresì, che a misura, che gli angoli ACD, ADC sono maggiori, uguali, o minori di due retti, o sia de' due angoli ACD, ACB, così l'angolo in D, ovvero, in B è maggiore, uguale, o minore di BCA, ed il lato AC è maggiore, uguale, o minore di AB, è perciò se ai due ultimi archi vi si aggiunga di comune l'arco AD, si avrà, che secondochè i due angoli in D, e DCA, sono maggiori, uguali, o minori di due retti, così AD, AC insieme sono maggiori uguali, o minori di DAC, o sia di 180°.

SEZIONE III.

PRINCIPJ, DAI QUALI SI DEDUCE, PER QUANTO È POSSIBILE, LA CONOSCENZA DELLA SPECIE DI UN'ANGOLO, O DI UN LATO DEL TRIANGOLO SFERICO.

35. Nel triangolo sferico, se due lati sono ambedue archi di quadranti, sono retti gli angoli opposti a tali lati, e viceversa. Poicchè nel triangolo sferico EAF (fig. 2.): posti i lati EA, FA per archi di quadranti, sarà A il polo del cerchio, a cui appartiene il lato EF (n. 11.). Onde gli angoli sferici AEF, AFE sono retti (n. 10.) Supponendosi poi retti gli angoli AEF, AFE, debbano i cerchi, a cui appartengono gli archi AF, AE passare pel polo del cerchio, a cui appartiene l'arco EF (n. 11.), sarà perciò il punto A tale polo, dal perchè in esso s'intersecano tali cerchi. Quindi gli archi AE, AF, sono ambedue archi di quadrante.

Laonde se in un triangolo sferico due lati sono ambedue archi di quadrante, e l'angolo da essi compreso è retto, sarà il terzo lato anche arco di quadrante.

36. In un triangolo sferico rettangolo, se uno de' lati adjacenti all'angolo retto, è minore di arco di quadrante, l'angolo opposto a tale lato, è acuto, e viceversa. Poicchè posto nel triangolo ABC (fig. 6.) rettangolo in A, il lato AB, minore di arco di quadrante, lo stesso s'intenda

prolungato in D finchè sia AD arco di quadrante, per D, e C vi si fa passare l'arco CD di cerchio massimo. Essendo l'angolo in A retto, ed AD arca di quadrante, sarà D polo del cerchio, a cui appartiene AC (n. 10.) Quindi l'angolo sferico DCA è retto, e conseguentemente l'angolo BCA è acuto. Suppongasi poi l'angolo BCA acuto, si tiri l'arco CD di cerchio massimo perpendicolare ad AC e si prolunghi AB in D. Essendo retti i due angoli DAC, DCA saranno DA, e DC archi di quadrante (n. 35.). Adunque AB è minore di arco di quadrante.

37. Quindi si ricava, che se anche AC è minore di arco di quadrante anche l'angolo ABC è acuto; ed è altresì acuto anche l'angolo in D, perchè misurato dall'arco AC; laonde l'angolo CBD è ottuso, perchè conseguente di CBA, onde CD è maggiore di CB, ed essendo CD arco di quadrante, sarà CB minore di arco di quadrante. Per lo che se in un triangolo rettangolo, vi sono due angoli acuti, l'ipotenusa è minore di arco di quadrante, e viceversa.

38. In un triangolo sferico rettangolo, se uno de' lati adjacenti all'angolo retto è maggiore di arco di quadrante, l'angolo sferico opposto a tale lato, è ottuso, e viceversa. Poicchè nei triangolo ABC (fig.7.) suppongasi il lato AB maggiore di arco di quadrante dal quale si taglia AD arco di quadrante, sarà D polo di AC (n.10.), onde l'angolo ACD (n. 10.), e conseguentemente l'angolo ACB è ottuso. Inoltre pongasi l'angolo ACB, che sia ottuso, s'intenda per C passarvi l'arco CD di cerchio massimo perpendicolarmente ad AC; saranno retti i due angoli ACD, DAC, e perciò AD, ed AC sono ambedue archi di quadrante (n. 35.). Onde AB è maggiore di arco di quadrante.

39. Dal che si deduce, che se AC è anche maggiore di arco quadrante, sarà l'angolo ABC anche ottuso, e perciò maggiore di CDB, che è retto: conseguentemente CB è minore di CD, ma CD è arco di quadrante, adunque CB è minore di arco di quadrante. Laonde in un triangolo rettangolo, se i due angoli obbliqui sono ottusi, o i lati che contengono l'angolo retto, sono ambidue maggiori di archi di quadrante, l'ipotenusa allora è minore di arco di quadrante. Se poi AC è minore di arco di quadrante, sarà l'angolo ABC acuto, e perciò CD minore di CB, cioè che CB è maggiore di arco di quadrante; quindi se de' due lati, uno è maggiore, e l'altro è minore di arco di quadrante, o de' due angoli obbliqui, uno è ottuso, e l'altro è acuto, l'ipotenusa è sempre maggiore di arco di quadrante.

40. Per la qual cosa nel triangolo sferico rettangolo, se l'ipotenusa è maggiore di arco di quadrante, in tal caso de' due lati, che conten-

gono l'angolo retto, uno è maggiore, e l' altro è minore di arco di quadrante, e de' due angoli obbliqui, uno è ottuso, e l'altro è acuto. Ma se l'ipotenusa è minore di arco di quadrante, i due lati sono ambidue maggiori, o ambidue minori di arco di quadrante, e li due angoli obbliqui ambidue ottusi, o ambidue acuti.

41. In un triangolo sferico qualunque, se due lati sono insieme minori di 180°, l'angolo opposto al lato minore è acuto, e se la somma da due angoli è minore di 180°, il lato opposto all' angolo minore è più piccolo di arco di quadrante. Poicchè nel triangolo ADC (fig. 3.) supposto che $DA + AC$ sia minore di 180°, e che AD sia minore di AC, si prolunghino i lati DA, DC finchè s' incontrino nel punto B. Or essendo $DA + AC$ minore di 180°, saranno pure minori di $DA + AB$, e perciò AC è minore di AB. Laonde l'angolo ABC; ovvero ADC è minore di ACB; vi si aggiunga di comune l'angolo ACD, e si avrà $ADC + ACD$ minore di $ACB + ACD$; cioè minore di due retti; ed è l'angolo ADC minore di ACD, perchè AC, che sottende il primo è minore di AD, che sottende il secondo, perciò l'angolo ADC, opposto al lato minore, dovrà essere necessariamente acuto.

Sia in secondo luogo l'angolo $ACD + ADC$ minore di 180°, e sia il primo maggiore del secondo. Or essendo gli angoli ACD, ADC minori di due retti, sono pure minori di ACD, ACB, e perciò ADC, ovvero ABC è minore di ACB, quindi AC è minore di AB, si aggiunga di comune a questi l'arco AD, si avrà $AD + AC$ minore di $AD + AB$, cioè minore di 180°, ed essendo AC minore di AD, debba essere perciò AC minore di 90°.

42. In un triangolo sferico qualunque, se due lati sono insieme maggiori di 180°, l'angolo opposto al lato maggiore è ottuso, e viceversa. La dimostrazione di tale principio si ricava con facilità dal numero precedente.

SEZIONE IV.

ANALOGIE APPLICABILI ALLA DETERMINAZIONE DI ALCUNE DELLE PARTI DI UN TRIANGOLO SFERICO QUALUNQUE.

43. In ogni triangolo sferico i seni de' lati sono come i seni degli angoli opposti. Poicchè sia CBA (fig. 8.) un triangolo sferico, i di cui lati CB, CA, ed AB sieno archi di cerchi massimi di una sfera, il di cui centro sia S, si uniscono le rette CS, BS, ed AS. Ciò posto, dal

vertice di qualsivoglia angolo C si tiri nel piano ad esso opposto ASB, la perpendicolare CD, e poi da D sui lati SA, SB si calino le perpendicolari DE, DF, e si congiungono le CE, e CF. Dapoicchè il piano DEC passa per la retta DC, perciò è perpendicolare all'altro SAB, ed ES, ch'esiste in questo piano, è perpendicolare alla loro comune sezione DE, sarà in conseguenza la stessa SE, anche perpendicolare al piano CED, e quindi alla retta CE che giace in esso. Ed essendo le rette CE, ED perpendicolari nell'istesso punto E alla comune sezione SA de' piani SAC, SAB in cui esse rispettivamente esistono, dinoterà l'angolo CED l'inclinazione di tali piani, e conseguentemente è l'equivalente dell'angolo sferico in A. Similmente si dimostra, che l'angolo CFD, sia quello d'inclinazione del piano CSB all'altro SBA, e perciò l'equivalente dell'altro angolo sferico in B. E poicchè nel triangolo rettilineo CED, rettangolo in D, $CE : CD :: R : \text{Sen } CED$. È nell'altro triangolo DCF, rettangolo anche in D

$$CD : CF :: \text{Sen } CFD : R.$$

Quindi $CE \times \text{sen } CED = CD \times R.$

$CF \times \text{sen } CFD = CD \times R.$

Perciò $CE \times \text{sen } CED = CF \times \text{sen } CFD.$

Per lo che $CE : CF : \text{sen } CFD : \text{sen } CED.$

Ma CE. e GF, sono rispettivamente i seni degli archi CA, e CB, e gli angoli CFD, CED, sono gli equivalenti degli angoli in B., ed in A del triangolo sferico BCA. Adunque sen CA : sen CB : sen B : sen A.

Similmente si dimostra che sen CB : sen AB :: sen A : sen C; e per equalità sen CA : sen AB :: sen B : sen C.

44. Or esprimendosi i lati CB. CA, ed AB colle lettere a, b, c, dalle trè precedenti analogie, si ricavano le sei seguenti equazioni.

$$\text{I. } \text{sen } A = \frac{\text{sen } a \times \text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } a \times \text{sen } C}{\text{sen } c}$$

$$\text{II. } \text{sen } C = \frac{\text{sen } c \times \text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } c \times \text{sen } B}{\text{sen } b}$$

$$\text{III. } \text{sen } B = \frac{\text{sen } b \times \text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } b \times \text{sen } C}{\text{sen } c}$$

$$\text{IV. } \text{sen } a = \frac{\text{sen } A \times \text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } A \times \text{sen } c}{\text{sen } C}$$

$$\text{V. } \text{sen } c = \frac{\text{sen } C \times \text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } C \times \text{sen } b}{\text{sen } B}$$

$$\text{VI. } \text{sen } b = \frac{\text{sen } B \times \text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } B \times \text{sen } c}{\text{sen } C}$$

SEZIONE V.

ANALOGIE CONDUCENTI ALLA SOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO RETTANGOLO.

45. Esprimonsi i lati BC, CA, ed AB con a, b, c, ed il seno massimo con R (fig. 11).

46. In ogni triangolo sferico rettangolo, il seno massimo stà alla tangente dell' ipotenusa, come il coseno di un' angolo obbliquo stà alla tangente del lato adjacente a questo.

Sia ABC (fig. 11) un triangolo sferico rettangolo in A, e siano dal centro O della sfera tirati i tre raggi OA, OC, OB. Saranno i tre archi AB, BC, e CA misure de' tre angoli rettilinei AOB, BOC, COA. Inoltre s' intendono nel settore AOB, e dal punto B, tirata BP perpendicolare ad AO; nel settore AOC tirata dal punto P la PQ perpendicolare ad OC, si coniunge la retta BQ. Essendo retto l' angolo BAC; e consequentemente il settore AOB perpendicolare al settore AOC, sarà la BP come perpendicolare alla di loro comune sezione OA, perpendicolare pure al settore AOC; onde l' angolo BPQ è retto; ed il triangolo rettilineo BQP che passa per BP, è anche perpendicolare al settore AOC; e perciò OQ come perpendicolare a PQ, comune sezione di questi, è perpendicolare pure al triangolo BQP, e conseguentemente anche alla retta BQ. Per lo che l' angolo BQP dinota l' inclinazione de' due settori BOC, AOC, e perciò è uguale all'angolo ACB. Or presa la OQ per raggio, sarà la QB come tangente dell' angolo BOC, anche tangente dell' arco BC, e PQ, come tangente dell'angolo AOC, anche tangente dell'arco AC. Quindi $BQ : PQ ::$ Tang. BOC : Tang. $AOC =$ Tang. BC: Tang. AC. Ma pel triangolo rettilineo BPQ rettangolo in P, è pure $BQ : PQ :: R :$ Cos $BQP = R$: Cos : BCA.

Adunque Tang. BC : Tang. AC :: R : cos. BCA.

E permutando, e poi invertendo si avrà

R : Tang. BC :: cos. BCA : Tang. AC.

Similmente si dimostra, che R : Tang. BC :: Cos CBA : Tang. AB.

47 Essendo R : Tang. a :: cos. B : Tang. c, saranno

$$\text{I. Tang. } c = \frac{\text{Tang. } a \times \cos B}{R}$$

$$\text{II. Tang. } a = \frac{R \times \text{Tang. } c}{\text{Cos. } B}$$

$$\text{III. Cos } B = \frac{R \times \text{Tang. } c}{\text{Tang. } a}$$

Quindi dell' ipotenusa, di un' angolo obbliquo, e del lato adjacente, datene due qualunque, si determina il terzo.

48 In ogni triangolo sferico rettangolo, il seno massimo stà alla tangente di un' angolo obbliquo, come il seno del lato adjacente stà alla tangente del lato opposto. Fatta l' istessa preparazione del n. 46, nella medesima fig. II.ª, ed inoltre presa OP per raggio, sarà PQ seno dell' angolo AOC, ovvero dell' arco AC, e BP tangente dell' angolo AOB, o sia di AB. Adunque

QP : PB :: sen AOC : Tang. AOB = sen AC : Tang. AB.
Ma nel triangolo BPQ.
QP : PB :: R : Tang. PQB = R : Tang. BCA.
Adunque sen AC : Tang. AB :: R : Tang. BCA.
Ovvero R : Tang. BCA = sen AC : Lang. AB.
Similmente si dimostra, che R : Tang. CBA :: sen AC : Tang. AB.

49 Essendo R : Tang. C :: sen b : Tang. c, saranno.

$$\text{I. Tang. } c = \frac{\text{Tang. } C \times \text{sen } b}{R}$$

$$\text{II. Tang. } C = \frac{R \times \text{Tang. } c}{\text{sen } b}$$

$$\text{III. Sen } b = \frac{R \times \text{Tang. } c}{\text{Tang. } C}$$

Quindi in un triangolo sferico rettangolo, dell'angolo obbliquo, del cateto opposto, e dell' altro adjacente, datene due qualunque, si determina il terzo.

50 Si avverta che la terza equazione del numero precedente forma un caso dubbio, sempre che non sia noto benanche l'ipotenusa, o an-

che l'altro angolo obbliquo, e questo sia tale da verificarsi uno de' casi, di cui è parola nei num.[1] 41 e 42; poichè la specie del lato, che si cerca non è affatto determinabile, senza il concorso delle indicate circostanze, menocchè non risultasse la specie del lato che si cerca da circostanze speciali.

51 Nel triangolo sferico rettangolo, il seno massimo stà al coseno di un lato come il coseno dell' altro lato stà al coseno dell' ipotenusa.

Sia *BAC* (Fig. 11) un triangolo sferico rettangolo in *A*, i cui lati *CA* e *CB* siano prolungati in *F* ed in *D*, finchè *CF*, e *CD* siano archi di quadranti, e per *F*, e *D* s' intenda menato l' arco *FE* di cerchio massimo, che interseca *AB* prolungato in *E*. Saranno retti gli angoli in *F* e *D*; poichè di *FE* il punto *C* n' è uno de' poli (n.° 11.) e sarà *FD* misura dell' angolo *ACB* (num. 21.). Ed essendo gli angoli *EFA*, ed *EAF*, ambidue retti, saranno *EA*, ed *EF*, ambidue archi di quadranti (num. 35), ed *AF* misura dell' angolo *AEF*. Sicchè del triangolo sferico *BDE*, rettangolo in *D*, il lato *BD*, manca di arco di quadrante di quanto è *BC*, l' ipotenusa *BE* manca dell' arco di quadrante per *AB*, ed il lato *DE* è minore dell' arco di quadrante di quanto è *FD*, ch'è misura dell'angolo sferico in *C*. Or essendo pel num. 43.

$$R : \text{sen } DEB :: \text{sen } EB : \text{sen } BD.$$

Ed è poi sen BE = cos AB, sen DEB = sen AF = cos AC, e sen BD = cos BC. Adunque R : cos AC :: cos AB : cos BC.

52 Quindi n' emergono le tre seguenti equazioni.

$$\text{I. Cos } a = \frac{\cos b \times \cos c}{R}$$

$$\text{II. Cos } c = \frac{R \times \cos a}{\cos b}$$

$$\text{III. Cos } b = \frac{R \times \cos a}{\cos c}$$

Per la qual cosa del triangolo sferico rettangolo, de' tre lati, essendone dati due, si determina il terzo.

53 Nel triangolo sferico rettangolo il seno massimo stà al seno di un angolo obbliquo, come il coseno del lato adjacente al medesima sta al coseno dell'altro angolo. Poichè nel triangolo sferico DBE pel n. 45.

$$R : \text{sen } DBE :: \text{sen } BE : \text{sen } DE$$

Ma l'angolo $DBE = ABC$, perchè verticali, sen $BE =$ cos AB, sen $DE =$ cos $FD =$ cos ACB; perciò R : sen ABC :: cos AB : cos ACB.

Similmente si dimostra che R : sen ACB :: cos AC : cos ABC.

54 Essendo R : sen B :: cos c : cos C, saranno

$$\text{I. Cos } C = \frac{\text{sen } B \times \cos c}{R}$$

$$\text{II. Cos } c = \frac{R \times \cos C}{\text{sen } b}$$

$$\text{III. Sen } B = \frac{R \times \cos C}{\cos c}$$

Quindi nel triangolo sferico rettangolo, de' due angoli obbliqui, e del lato adjacente ad uno di essi, datene due, si determina il terzo.

55 Si avverta, che il caso della terza equazione del numero precedente è dubbio; poichè prolungati i lati CA, CB, finchè si riuniscono nel punto H, essendo l' angolo in C uguale all' angolo in H; è chiaro, che i due dati AB, e l'angolo in C, appartengono a' due triangoli ABC, ABH. Quindi l' esposto caso è risolvibile, se coll' ajuto de' principj trattati nella sezione 3, o d' altre speciali circostanze, è determinabile la specie dell' angolo ABC.

56 Nel triangolo sferico rettangolo, il seno massimo stà alla tangente di un' angolo obbliquo come il coseno dell'ipotenusa stà alla cotangente dell' altro angolo obbliquo. Nel triangolo sferico BAC (fig. 11). rettangola in A, s' intenda eseguita l' istessa preparazione, che ne' numeri precedenti, si avrà nel triangolo BDE, rettangolo in D che

$$R : \text{Tang} : DBE :: \text{Sen } BD : \text{Tang } DE \text{ (num. 48).}$$

Ma l' angolo $DBE = ABC$; sen $BD =$ cos BC, e tang. $DE =$ cot $FD =$ cot ACB. Adunque R : tang. ABC :: cos BC : cot. ACB.

Similmente si dimostra, che R : tang. ACB :: cos. BC : cot ABC.

57 Essendo R: tang. B :: cos a : cot C ; saranno

$$\text{I. Cot } C = \frac{\text{tang. } B \times \cos a}{R}$$

$$\text{II. Tang. } B = \frac{R \times \cot C}{\cos a}$$

$$\text{III. Cos } a = \frac{R \times \cot C}{\text{tang. } B}$$

Quindi nel triangolo sferico-rettangolo , de' due angoli obbliqui, e dell' ipotenusa , datene due , se ne determina il terzo.

58 Dal che si ricava , che per mezzo dell' equazioni nei numeri 44 , 47 , 49, 52, 54 e 57 si può risolvere il triangolo sferico rettangolo in tutt' i casi possibili.

59 Si avverta , che siccome gli angoli conseguenti hanno li stessi seni , coseni, tangenti , e cotangenti così per determinare l' angolo , o l' arco a cui appartiene la linea trigonometrica , che si ottiene dalle sopraindicate equazioni , è necessario conoscere la specie dell' angolo , o dell' arco , che si cerca determinare , altrimenti il caso è dubbio.

SEZIONE VI.

DELLE ANALOGIE DIRETTE ALLA SOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO OBBLIQUANGOLO.

60 Se dal vertice dell' angolo B del triangolo sferico ABC (fig. 9 e 10) si mena l' arco BD di cerchio massimo , perpendicolare al lato opposto AC ; tale arco cade dentro del triangolo , se gli angoli in A, ed in C sono della medesima specie , cioè ambidue acuti , o ambidue ottusi , e lo stesso arco BD caderà fuori del triangolo, se degli angoli in A ed C, uno è acuto, e l' altro è ottuso. Poichè supposti ambidue acuti gli angoli BAC, BCA (fig.9), se si niega , che l' arco di cerchio massimo perpendicolare ad AC menato pel punto B, cada dentro del triangolo ABC , caschi pure fuori , se è possibile ; e sia questo l' arco BE, che incontra AC prolungato in E. Essendo l' angolo BCA acuto, sarà il suo conseguente BCE ottuso. Quindi BE come opposto all' angolo acuto in A del triangolo rettangolo BEA , sarà minore dell' arco di quadrante (num. 37) , e come opposto all' angolo ottuso BCE dell'altro triangolo rettangolo BEC, dev' essere maggiore di arco di qua-

drante (n. 38), lo che è impossibile. Adunque è impossibile pure, che l'arco di cerchio massimo BD, menato per lo punto B perpendicolare ad AC, non caschi dentro il triangolo ABC. Lo stesso si verificherà, allorchè gli angoli BAC, BCA sono ottusi.

Suppongasi in secondo luogo nel triangolo BAC (fig. 10.) l'angolo in A acuto, e l'angolo in C ottuso. Se si niega, che l'arco di cerchio massimo menato pel punto B perpendicolare ad AC, cada fuori del triangolo BAC, caschi dentro se è possibile, come BE. Sarà BE come opposto all'angolo acuto in A nel triangolo rettangolo BAE, minore dell'arco di quadrante (num. 37), e come opposto all'angolo ottuso BCE nel triangolo rettangolo BEC, sarà maggiore dell'arco di quadrante (num. 38), ma ciò è impossibile; quindi è impossibile pure, che l'arco BD nell'ultimo caso non ceschi fuori del triangolo BAC.

61 In un triangolo sferico obbliquangolo, se pel vertice di uno de' suoi angoli, vi si fa passare un arco di cerchio massimo, che faccia angoli retti col lato opposto, saranno i coseni degli angoli contenuti dai lati dell'angolo intersecato, e dal descritto arco di cerchio massimo, come la inversa delle tangenti de' medesimi lati.

Sia ABC (fig. 12 n. 1 2) un triangolo sferico obbliquangolo, e BD sia l'arco di cerchio massimo, menato pel punto B perpendicolare ad AC. Dico, che i coseni degli angoli ABD, CBD, sono nella ragione delle tangenti degli archi BC, BA. Poichè pel num. 46.

$$R : \cos ABD :: \text{tang. } AB : \text{tang. } BD$$
$$B : \cos CBD :: \text{tang. } CB : \text{tang. } BD$$

Saranno $R \times \text{tang. } BD = \cos ABD \times \text{tang. } AB.$

$R \text{ tang. } BD = \cos CBD \times \text{tang. } CB.$

Adunque $\cos ABD \times \text{tang. } AB = \cos CBD \times \text{tang. } CB.$
Quindi $\cos ABD : \cos CBD :: \text{tang. } BC : \text{tang. } AB.$

62 Se in un triangolo sferico obbliquangolo, si mena per uno de' suoi angoli, un' arco di cerchio massimo perpendicolare al lato opposto, staranno le tangenti de' rimanenti due angoli del triangolo, come l'inversa de' seni de' due segmenti, ne' quali rimane diviso il lato suddetto dalla perpendicolare menata, nel caso, che questa cade dentro del triangolo, o come l'inversa de' seni del lato opposto prolungato, e del prolungamento di esso sino all'incontro della perpendicolare.

Sia *ABC* (fig. 12 n. 1 e 2) un triangolo sferico obbliquangolo, e *BD* sia l' arco di cerchio massimo, menato pel punto *B* perpendicolare ad *AC*. Le tangenti degli angoli in *A*, ed in *C* sono nella ragione de' seni degli archi *CD*, e *DA*. Poichè pel n. 48.

R tang. BAC :: sen AD : tang. BD
R : tang. BCA :: sen CD : tang. BD

Saranno $R \times$ tang $BD =$ tang $BAC \times$ sen AD
$R \times$ tang. $BD =$ tang. $BCA \times$ sen CD

Adunque tang. $BAC \times$ sen $AD =$ tang. $BCA \times$ sen CD
Quindi tang. BAC : tang. BCA :: sen CD : sen AD.

63 Si avverte che nella seconda analogia del numero precedente la tangente dell' angolo *BCA* è la stessa che la tangente del supplemento *BCD* (fig. 12 n. 1.) e perciò l' ultima analogia è applicabile ai due casi.

64 Supponendosi l' istesso, che nei numeri precedenti, si avrà, che in un triangolo sferico obbliquangolo, i coseni de' due segmenti, ne' quali rimane diviso un lato dalla perpendicolare, o i coseni del lato proluogato, e del prolungamento di esso sino all' incontro della perpendicolare, sono nella stessa ragione de' coseni de' rimanenti lati.

Poichè essendo pel n. 51.

R : cos BD :: cos AD : cos AB
R cos BD :: cos DC : cos BC

Sarà cos AD : cos AB :: cos DC : cos BC; e permutando
cos AD : cos DC :: cos AB : cos BC.

65 Supponendosi in fine l' istesso, che ne' numeri precedenti, si avrà, che nel triangolo sferico obbliquangolo *ABC* (fig. 12 n. 1 e 2) i seni degli angoli *ABD*, *CBD* sono nella stessa ragione de' coseni degli angoli *BAD*, *BCD*. Poichè permutando le ragioni uguali dimostrate nel num. 53 si avrà

R : cos BD :: sen ABD : cos BAD
R : cos BD :: sen DBC : cos BCD

Sarà sen ABD : cos BAD :: sen DBC cos BCD, e permutando
sen ABD : sen DBC :: cos BAC : cos BCA.

66. Essendo pel num. 61. Cos ABD : cos CBD :: tang. BC : tang. AB.

Saranno I. $\text{Tang. } AB = \frac{\cos CBD \times \text{tang. } BC}{\cos ABD}$

II. $\text{Cos. } CBD = \frac{\cos ABD \times \text{tang } AB}{\text{tang. } BC}$

III. $\text{Tang. } BC = \frac{\cos ABD \times \text{tang. } AB}{\cos CBD}$

IV. $\text{Cos } ABD = \frac{\cos CBD \times \text{tang. } BC}{\text{tang. } AB}$

67. Essendo inoltre pel num. 62
Tang. BAC : tang. BCA :: sen CD : sen AD. Saranno

I. $\text{Sen } AD = \frac{\text{tang. } BCA \times \text{sen } CD}{\text{tang. } BAC}$

II. $\text{Sen } CD = \frac{\text{tang. } BAC \times \text{sen } AD}{\text{tang. } BCA}$

III. $\text{Tang. } BCA = \frac{\text{sen } AD \times \text{tang. } BAC}{\text{sen } CD}$

IV. $\text{Tang. } BAC = \frac{\text{sen } CD \times \text{tang. } BCA}{A \text{ sen } AD}$

68. Essendo pel num. 64. Cos AD : Cos DC :: Cos AB : Cos BC saranno.

I. $\text{Cos } BC = \frac{\text{Cos } DC \times \text{Cos } AB}{\text{Cos } AD}$

II. $\text{Cos } AB = \frac{\text{Cos } AD \times \text{Cos } BC}{\text{Cos } DC}$

III. $\text{Cos } DC = \frac{\text{Cos } BC \times \text{Cos } AD}{\text{Cos } AB}$

IV. $\text{Cos } AD = \frac{\text{Cos } AB \times \text{Cos } DC}{\text{Cos } BC}$

69. Essendo finalmente pel num. 65.

Sen ABD : Sen DBC :: Cos BAC : Cos BCA, saranno

$$\text{I. Cos. } BCA = \frac{\text{Sen } DBC \times \text{Cos } BAC}{\text{Sen } ABD}$$

$$\text{II. Cos } BAC = \frac{\text{Sen } ABD \times \text{Cos } BCA}{\text{Sen } DBC}$$

$$\text{III. Sen } DBC = \frac{\text{Cos } BCA \times \text{Sen } ABD}{\text{Cos } BAC}$$

$$\text{IV. Sen } ABD = \frac{\text{Cos } BAC \times \text{Sen } DBC}{\text{Cos } BCA}$$

70. Dall'equazioni eununciate nei numeri 43, 66, 67, 68 e 69 si ricava la maniera di risolvere il triangolo sferico obbliquangolo per le prime quattro combinazioni, di cui si è parlato nel num. 24, come meglio si vedrà nella Sezione seguente. Per eseguire la soluzione dell'istesso triangolo per la 5 e 6 combinazione passiamo a stabilire i seguenti principj.

71. La somma de' coseni de' due archi disuguali, divisa per la differenza di tali coseni, è uguale alla cotangente della metà della somma de' medesimi archi, divisa per la tangente della metà della di loro differenza.

Esprimano P e Q i due archi disuguali, dico, che sarà

$$\frac{\text{Cos } Q + \text{Cos } P}{\text{Cos } Q - \text{Cos } P} = \frac{\text{Cot } \frac{P+Q}{2}}{\text{Tang } \frac{P-Q}{2}}$$

Pongasi in oltre il raggio $= 1$, $P = A + B$, e $Q = A - B$, e sia $A > B$

Or essendosi dimostrato nella trigonometria rettilinea (n.48 Flauti.

$$\text{Cos } A - B = \frac{\text{Cos } A \times \text{Cos } B + \text{Sen } A \times \text{Sen } B}{R}$$

$$\text{Cos } A + B = \frac{\text{Cos } A \times \text{Cos } B - \text{Sen } A \times \text{Sen } B}{R}$$

Saranno uguali tanto le somme, che le differenze di essi, cioè

$$\text{Cos } A - B + \text{Cos } A + B = \frac{2 \text{ Cos } A \times \text{Cos } B}{R}$$

$$\text{Cos } A + B - \text{Cos } A - B = \frac{2 \text{ Sen } A \times \text{Sen } B}{R}$$

Ed essendo $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ sarà

$$\tfrac{1}{2}\ R \times \text{Cos } A - B + \text{Cos } A + B = \tfrac{1}{2}\ \frac{R \times 2 \text{ Cos } A \times \text{Cos } B}{R} = \text{Cos } A \times \text{Cos } B$$

$$\tfrac{1}{2}\ R \times \text{Cos } A - B - \text{Cos } A + B = \tfrac{1}{2}\ \frac{R \times 2 \text{ Sen } A \times \text{Sen } B}{R} = \text{Sen } A \times \text{Sen } B$$

Inoltre se di due quantità disuguali, come 12 e 4, l'insieme di 16 ch'è la di loro somma, e di 8, ch'è la di loro differenza, cioè il 24, diviso per 2 dà 12, che n'è la maggiore, e l'eccesso poi del 16 ch'è la somma di esse su di 8, ch'è la differenza delle medesime, cioè 8, diviso per 2 dà 4 ch'è la minore di tali quantità, si avrà, che $A = \frac{P + Q}{2}$, e $B = \frac{P - Q}{2}$. Adunque sostituendo queste quantità alle di loro uguali nelle due ultime equazioni, si avrà.

$$\tfrac{1}{2}\ R\ (\text{Cos } Q + \text{Cos } P) = \text{Cos } \frac{P + Q}{2} \times \text{Cos } \frac{P - Q}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\ R\ (\text{Cos } Q - \text{Cos } P) = \text{Sen } \frac{P + Q}{2} \times \text{Sen } \frac{P - Q}{2}.$$ Quindi

$$\frac{\tfrac{1}{2}\ R\ (\text{Cos } Q + \text{Cos } P)}{\tfrac{1}{2}\ R\ (\text{Cos } Q - \text{Cos } P)} = \frac{\text{Cos } Q + \text{Cos } P}{\text{Cos } Q - \text{Cos } P} = \frac{\text{Cos } \frac{P+Q}{2} \times \text{Cos } \frac{P-Q}{2}}{\text{Sen } \frac{P+Q}{2} \times \text{Sen } \frac{P-Q}{2}}$$

per essere uguali di tali frazioni tanto i numeratori, quanto i denomitori.

Ma di un' arco il cos: sen :: R : Tang.

Adunque $\text{Cos } \frac{P + Q}{2} : \text{Sen } \frac{P + Q}{2} :: R : \text{Tang. } \frac{P + Q}{2}$

$$\text{Cos } \frac{P-Q}{2} : \text{Sen } \frac{P-Q}{2} :: R : \text{Tang. } \frac{P-Q}{2}$$

Onde $\dfrac{\text{Cos}\,\frac{P+Q}{2}}{\text{Sen}\,\frac{P+Q}{2}} = \dfrac{R}{\text{Tang.}\,\frac{P+Q}{2}}$

E $\dfrac{\text{Cos}\,\frac{P-Q}{2}}{\text{Sen}\,\frac{P-Q}{2}} = \dfrac{R}{\text{Tang.}\,\frac{P-Q}{2}}$

E moltiplicando tra loro queste frazioni uguali, si avrà.

$$\frac{\text{Cos}\,\frac{P+Q}{2} \times \text{Cos}\,\frac{P-Q}{2}}{\text{Sen}\,\frac{P+Q}{2} \times \text{Sen}\,\frac{P-Q}{2}} = \frac{\text{Cos}\,Q + \text{Cos}\,P}{\text{Cos}\,Q - \text{Cos}\,P} = \frac{R^2}{\text{Tang}\,\frac{P+Q}{2} \times \text{Tang}\,\frac{P-Q}{2}}$$

In oltre di un arco Tang : R :: R : Cotang.

Cioè Tang. $\frac{P+Q}{2}$: R :: R : Cot $\frac{P+Q}{2}$

Quindi $\dfrac{R}{\text{Tang.}\,\frac{P+Q}{2}} = \dfrac{\text{Cot}\,\frac{P+Q}{2}}{R}$

E $\dfrac{R^2}{\text{Tang.}\frac{P+Q}{2} \times \text{Tang.}\frac{P-Q}{2}} = \dfrac{R}{\text{Tang.}\frac{P+Q}{2}} = \dfrac{\text{Cot}\,\frac{P+Q}{2}}{R} \times \dfrac{R}{\text{Tang.}\,\frac{P-Q}{2}}$

Adunque $\dfrac{R^2}{\text{Tang}\,\frac{P+Q}{2} \times \text{Tang}\,\frac{P-Q}{2}} = \dfrac{\text{Cos}\,P + \text{Cos}\,Q}{\text{Cos}\,Q - \text{Cos}\,P} = \dfrac{\text{Cot}\,\frac{P+Q}{2}}{R} \times$

$\dfrac{R}{\text{Tang}\,\frac{P-Q}{2}} = \dfrac{\text{Cot}\,\frac{P+Q}{2} \times R}{\text{Tang}\,\frac{P-Q}{2} \times R}$; e liberata l'ultima frazione del fattore R

tanto nel numeratore, quanto nel denominatore si avrà

$$\frac{\text{Cos } Q + \text{Cos } P}{\text{Cos } Q - \text{Cos } P} = \frac{\text{Cot } \frac{P+Q}{2}}{\text{Tang } \frac{P-Q}{2}}$$

72. La somma de' seni di due archi disuguali, divisa per la differenza de' seni medesimi è uguale alla tangente della semisomma de' medesimi archi, divisa per la tangente della semidifferenza di tali archi.

Siano P, e Q i due archi disuguali, dico che sarà

$$\frac{\text{Sen } P + \text{Sen } Q}{\text{Sen } P - \text{Sen } Q} = \frac{\text{Tang. } \frac{P+Q}{2}}{\text{Tang. } \frac{P-Q}{2}}$$

Pongasi il raggio $= 1$; $P = A + B$, e $Q = A - B$, ed $A > B$. Poichè per la trigonometria rettilinea (n. 45 Flauti):

$$\text{Sen } A + B = \frac{\text{Sen } A \times \text{Cos } B + \text{Sen } B \times \text{Cos } A}{R}$$

$$\text{Sen } A - B = \frac{\text{Sen } A \times \text{Cos } B - \text{Sen } B \times \text{Cos } A}{R};$$ ed essendo $\frac{1}{R} = 1$, saranno

$$\text{Sen } A + B = \frac{1}{R}(\text{Sen } A \times \text{Cos } B + \text{Sen } B \times \text{Cos } A)$$

$$\text{Sen } A - B = \frac{1}{R}(\text{Sen } A \times \text{Cos } B - \text{Sen } B \times \text{Cos } A);$$ e prendendone di tali espressioni, prima la di loro somma, e poi la di loro differenza, si avranno.

$$\text{Sen } A + B + \text{Sen } A - B = \frac{2}{R} \; (\text{Sen } A \times \text{Cos } B$$

$$\text{Sen } A + B - \text{Sen } A - B = \frac{2}{R} \; (\text{Cos } A \times \text{Sen } B)$$

Ma se una quantità è uguale al prodotto d' una frazione per un'altra quantità, sarà l'ultima uguale al prodotto della prima quantità moltiplicata per la frazione rovesciata, ed essendo $\frac{2}{R} = \frac{2}{1} = 2\, R$, ed

applicando ciò alle due ultime equazioni si avrà, che

$$\frac{1}{2} R\,(\text{Sen } A + B + \text{Sen } A - B = \text{Sen } A \times \text{Cos } B)$$

$$\frac{1}{2} R\,(\text{Sen } A + B - \text{Sen } A - B = \text{Cos } A \times \text{Sen } B$$

Or essendo come si è dimostrato nel numero precedente $A = \frac{P + Q}{2}$ e $B = \frac{P - Q}{2}$, saranno pure

$$\frac{1}{2} R\,(\text{Sen } P + \text{Sen } Q = \frac{\text{Sen } P + Q}{2} \times \frac{\text{Cos } P - Q}{2}$$

$$\frac{1}{2} R\,(\text{Sen } P - \text{Sen } Q) = \frac{\text{Cos } P + Q}{2} \times \frac{\text{Sen } P - Q}{2}$$

Quindi $\frac{\text{Sen } P + \text{Sen } Q}{\text{Sen } P - \text{Sen } Q} = \frac{\text{Sen } \frac{P + Q}{2} \times \text{Cos } \frac{P - Q}{2}}{\text{Cos } \frac{P + Q}{2} \times \text{Sen } \frac{P - Q}{2}}$

Or di un' arco Cos : Sen :: R : Tang ; e perciò

$$\text{Cos } \frac{P + Q}{2} : \text{Sen } \frac{P + Q}{2} :: R : \text{Tang } \frac{P + Q}{2}$$

$$\text{Cos } \frac{P - Q}{2} : \text{Sen } \frac{P - Q}{2} :: R : \text{Tang } \frac{P - Q}{2}$$

Per lo che $\frac{\text{Sen } \frac{P + Q}{2}}{\text{Cos } \frac{P + Q}{2}} = \frac{\text{Tang } \frac{P + Q}{2}}{R}$

$$\frac{\text{Cos } \frac{P - Q}{2}}{\text{Sen } \frac{P - Q}{2}} = \frac{R}{\text{Tang } \frac{P - Q}{2}}$$

Laonde uguali saranno anche i prodotti, che si otterranno, moltiplicando tra loro queste ultime frazioni uguali cioè:

$$\frac{\text{Sen } \frac{P + Q}{2} \times \text{Cos } \frac{P - Q}{2}}{\text{Cos } \frac{P + Q}{2} \times \text{Sen } \frac{P - Q}{2}} = \frac{\text{Tang } \frac{P + Q}{2} \times R}{\text{Tang } \frac{P - Q}{3} \times R} = \frac{\text{Tang } \frac{P + Q}{2}}{\text{Tang } \frac{P - Q}{2}}$$

E si è dimostrato, che: $$\frac{\text{Sen } P + \text{Sen } Q}{\text{Sen } P - \text{Sen } Q} = \frac{\text{Sen } \frac{P+Q}{2} \times \text{Cos } \frac{P-Q}{2}}{\text{Cos } \frac{P+Q}{2} \times \text{Sen } \frac{P-Q}{2}}$$

Per la qual cosa $$\frac{\text{Sen } P + \text{Sen } Q}{\text{Sen } P - \text{Sen } Q} = \frac{\text{Tang } \frac{P+Q}{2}}{\text{Tang } \frac{P-Q}{2}}$$

73. Sia nell' istesso triangolo sferico obbliquangolo ABC (fig. 11, n. 1 e 2) menato pel vertice B l' arco BD di cerchio massimo, perpendicolare ad AC, starà la cotangente della semisomma de' lati dell' angolo intersecato alla tangente della semidifferenza di essi, come la cotangente della metà del terzo lato (nel caso, che la perpendicolare cade dentro del triangolo), o come la cotangente della metà della somma del terzo lato prolungato, e del prolungamento di esso, fino all'incontro della perpendicolare (nel caso, che questa cade fuori), stà alla tangente della semidifferenza de' due segmenti, in cui il terzo lato rimane diviso dalla perpendicolare (nel primo caso) o alla tangente della semidifferenza del terzo lato prolungato, e del prolungamento di esso fino alla perpendicolare; nel secondo caso; cioè

$$\text{Cot } \frac{AB+BC}{2} : \text{Tang } \frac{AB-BC}{2} :: \text{Cot } \frac{AD+DC}{2} : \text{Tang } \frac{AD-DC}{2}$$

Poichè pel num.° 64 $\text{Cos } AB : \text{Cos } BC :: \text{Cos } AD : \text{Cos } DC$.

Sarà $\text{Cos } AB + \text{Cos } BC : \text{Cos } AB - \text{Cos } BC :: \text{Cos } AD + \text{Cos } DC : \text{Cos } AD - \text{Cos } DC$

Quindi $$\frac{\text{Cos } AB + \text{Cos } BC}{\text{Cos } AB - \text{Cos } BC} = \frac{\text{Cos } AD + \text{Cos } DC}{\text{Cos } AD - \text{Cos } DC}$$

Ma pel num. 71 $$\frac{\text{Cos } AB + \text{Cos } BC}{\text{Cos } AB - \text{Cos } BC} = \frac{\text{Cot } \frac{AB+BC}{2}}{\text{Tang } \frac{AB-BC}{2}}$$

$$\frac{\text{Cos } AD + \text{Cos } DC}{\text{Cos } AD - \text{Cos } DC} = \frac{\text{Cot } \frac{AD+DC}{2}}{\text{Tang } \frac{AD-DC}{2}}$$

$$\text{Adunque}\quad \frac{\text{Cot}\,\frac{AB+BC}{2}}{\text{Tang}\,\frac{AB-BC}{2}} = \frac{\text{Cot}\,\frac{AD+DC}{2}}{\text{Tang}\,\frac{AD-DC}{2}}$$

E disposte tali frazioni uguali in proporzione, si avrà, che

$$\text{Cot}\,\frac{AB+BC}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AB-BC}{2} :: \text{Cot}\,\frac{AD+DC}{2} : \text{Tang}\,\frac{AD-DC}{2}$$

74. Venendo la metà di AC espressa nel num. 1 della fig. 12 da $\frac{AD+DC}{2}$; e nel num. 2 dell'istessa fig. da $\frac{AD-DC}{2}$; si ricava che nel primo caso, allorchè sono noti i tre lati del triangolo sferico obbliquangolo, risolvendo la proporzione $\text{Cot}\,\frac{AB+BC}{2} : \text{Tang}\,\frac{AB-BC}{2}$ $:: \text{Cot}\frac{1}{2}AC : \text{Tang}\frac{AD-DC}{2}$, si avrà $\frac{AD-DC}{2}$, la quale aggiunta alla metà di AC, determinerà AD; e tolto dalla stessa metà di AC, si avrà DC. E nel secondo caso risolvendo la proporzione $\text{Tang}\,\frac{AB-BC}{2}$: $\text{Cot}\,\frac{AB+BC}{2} :: \text{Tang}\,\frac{1}{2}AC : \text{Cot}\,\frac{AD+DC}{2}$; si otterrà $\frac{AD+DC}{2}$ la quale aggiunta alla metà di AC, determinerà AD, e tolta dalla stessa metà di AC, determinerà DC.

75. Quindi determinate AD, e DC si potranno avere coll'ajuto della terza equazione enunciata nel num 54 (pel num. 1 della fig. 12) gli angoli in A, ed in C; e poscia coll'equazioni 1 e 3 del n. 60 si avranno gli angoli ABD, DBC, la di cui somma darà l'angolo ABC. E nel caso del num. 2 della fig. 12 con DA ed AB, e coll'ajuto dell'indicata equazione del num. 54 si avrà l'angolo A, quindi colla stessa equazione e con DC, e CB, si avrà l'angolo BCD; il di cui supplemento darà l'angolo BCA; in fine colle sudette equazioni 1 e 3 del num. 60 si avranno gli angoli ABD e CBD; la di cui differenza darà l'angolo ABC.

76. Dall'esposto si rileva, che la risoluzione del triangolo sferico obbliquangolo, allora, che sono dati i tre lati, riuscirebbe lunga, ed imbarazzante, mettendosi in pratica i principj stabiliti ne' tre numeri precedenti. Ad ovviare ciò, bisogna far uso in tal caso dell'equazione, che qui appresso esibiamo.

77. In ogni triangolo obbliquangolo, il prodotto de' seni di due lati sta al prodotto de' seni delle differenze de' medesimi lati dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo, stà al quadrato del seno della metà dell' angolo compreso dagl' istessi due lati. La dimostrazione di quest' analogia si tralascia per brevità, potendo i giovani assicurarsi dell' esattezza del principio dall' identico risultato, che otterranno, eseguendone la risoluzione nell' una e nell'altra maniera.

78. Quindi nel triangolo sferico obbliquangolo ABC, dati i lati AB, BC, e CA; ed esprimendosi questi colle lettere c, a, b, con S la di loro somma, e con R il raggio, ed essendo

$$\text{Sen } c \times \text{Sen } a : \text{Sen } \frac{1}{2} S - c \times \text{Sen } \frac{1}{2} S - a :: R^2 : \text{Sen } \frac{1}{2} B^2$$

$$\text{Saranno Sen } \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\text{Sen } \frac{1}{2} S - c \times \text{Sen } \frac{1}{2} S - a \times R^2}{\text{Sen } c \times \text{Sen } a}$$

$$\text{Sen } \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\text{Sen } \frac{1}{2} S - c \times \text{Sen } \frac{1}{2} S - b \times R^2}{\text{Sen } c \times \text{Sen } b}$$

$$\text{Sen } \tfrac{1}{2} C^2 = \frac{\text{Sen } \frac{1}{2} S - a \times \text{Sen } \frac{1}{2} S - b \times R^2}{\text{Sen } a \times \text{Sen } b}$$

E calcolate queste quantità per mezzo di logaritmi, si avranno i logaritmi quadrati de' seni delle metà degli angoli A, B, C; perciò i doppj degli archi corrispondenti ai seni delle metà di tali logaritmi, disegneranno rispettivamente gli angoli cercati A, B, C.

79. In ogni triangolo sferico obbliquangolo, menando pel vertice di uno de' suoi angoli, un arco di cerchio massimo, perpendicolare al lato opposto, starà la tangente della metà della somma de' due angoli compresi dall'arco tirato, e dai due lati del triangolo alla tangente della metà della differenza di essi, come la cotangente della metà della somma de' due angoli del triangolo, non segati, stà alla tangente della differenza de' medesimi angoli. Cioè se nel triangolo obbliquangolo ABC, si fa passare pel vertice B l' arco BD di cerchio massimo, perpendicolare ad AC, sarà $\text{Tang } \frac{ABD + CBD}{2} : \text{Tang } \frac{ABD - CBD}{2} ::$

$$\text{Cot } \frac{BAC + BCA}{2} : \text{Tang } \frac{BAC - BCA}{2}.$$

Poichè pel num. 65 Sen ABD : Sen CBD :: Cos BAC : Cos BCA.

Adunque Sen ABD + Sen CBD : Sen ABD — Sen CBD :: Cos BAD + Cos BCD : Cos BAD — Cos BCD.

$$\text{Laonde } \frac{\text{Sen } ABD + \text{Sen } CBD}{\text{Sen } ABD - \text{Sen } CBD} = \frac{\text{Cos } BAD + \text{Cos } BCD}{\text{Cos } BAD - \text{Cos } BCD}$$

Ma pel num. 71.

$$\frac{\text{Cos } BAD + \text{Cos } BCD}{\text{Cos } BAD - \text{Cos } BCD} = \frac{\text{Cot } \frac{BAD + BCD}{2}}{\text{Tang } \frac{BAD - BCD}{2}}$$

E pel num. 72

$$\frac{\text{Sen } ABD + \text{Sen } CBD}{\text{Sen } ABD - \text{Sen } CBD} = \frac{\text{Tang } \frac{ABD + CBD}{2}}{\text{Tang } \frac{ABD - CBD}{2}}$$

$$\text{Perciò } \frac{\text{Tang } \frac{ABD + CBD}{2}}{\text{Tang } \frac{ABD - CBD}{2}} = \frac{\text{Cot } \frac{BAD + BCD}{2}}{\text{Tang } \frac{BAD - BCD}{2}}$$

Per la qual cosa.

$$\text{Tang} \frac{ABD + CBD}{2} : \text{Tang } \frac{ABD - CBD}{2} :: \text{Cot } \frac{BAD + BCD}{2} : \text{Tang } \frac{BAD - BCD}{2}.$$

80 Quindi

$$\text{Tang} \frac{ABD - CBD}{2} = \frac{\text{Tang } \frac{BAD - BCD}{2} \times \text{Tang} \frac{ABD + CBD}{2}}{\text{Cot } \frac{BAD + BCD}{2}} = \tfrac{1}{2} ABC$$

Or nel caso della fig. 12 n. 1 determinata $\frac{ABD - CBD}{2}$, è chiaro, che aggiunta questa alla metà di ABC, si avrà l'angolo DBC, e quindi nei triangoli rettangoli ABD, CBD, conoscendosi gli angoli

obbliqui, si potranno determinare le ipotenuse AB, BC, ed i lati AD, DC. Laonde dati i tre angoli nella fig. 12 n. 1 si potranno determinare i tre lati nel modo esposto.

81. Inoltre dall' analogia dell' istesso n. 79 si ricava l' equazione

$$\frac{\text{Tang}\, ABD + CBD}{2} = \frac{\text{Cot}\, \frac{BAD + BCD}{2} \times \text{Tang}\, \frac{ABD - CBD}{2} = \frac{1}{2} ABC}{\text{Tang}\, \frac{BAD - BCD}{2}}$$

Adunque nel caso della fig, 12 n. 2 determinata $\frac{ABD + CBD}{2}$, e questa aggiunta alla metà di ABC, si avrà ABD, e la medesima tolta dalla stessa metà di ABC si oterrà DBC; e perciò nei triangoli rettangoli ABD, DBC, conoscendosi gli angoli obbliqui, si potránno determinare le ipotenuse AB, BC, ed i lati AD, DC. Laonde dati gli angoli nella fig. 12 n. 2 si determineranno in tal modo i lati.

82. La soluzione del triangolo obbliquangolo coll'ajuto de'principj esposti ne' due numeri precedenti, allorchè sono noti i tre angoli, riuscirebbe laboriosa, ed intricata nella pratica. Ad evitare ciò si possono invece applicare i principj seguenti.

83. In ogni triangolo sferico obbliquangolo il prodotto de' seni di due angoli stà al prodotto de' coseni delle differenze dei medesimi angoli dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo stà al puadrato del coseno della metà del lato compreso dagli stessi due angoli. Sia ABC un triangolo obbliquangolo, sarà.

$$\text{Sen}\, A \times \text{Sen}\, C : \text{Cos}\, \tfrac{1}{2} S - C \times \text{Cos}\, \tfrac{1}{2} S - A :: R^2 : \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}\, b^2 .$$

La dimostrazione di questa analogia, anche per brevità si omette, potendo i giovani assicurarsi della sua esattezza dall' identico risultato, che si ottiene, eseguendo la soluzione del triangolo coll' uno, e coll' altro metodo.

84. Quindi, I.° $\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, b^2 = \frac{\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, S - A \times \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, S - C \times R^2}{\text{Sen}\, A \times \text{Sen}\, C}$

II.° $\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, a^2 = \frac{\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, S - B \times \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, S - C \times R^2}{\text{Sen}\, B \times \text{Sen}\, C}$

III.° $\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, c^2 = \frac{\text{Cos}\, \frac{1}{2}\, S - A \times \text{Cos}\, \frac{1}{2}\, S - B \times R^2}{\text{Sen}\, A \times \text{Sen}\, B}$

E calcolate queste quantità per mezzo de' logaritmi, si avranno i logaritmi quadrati de' coseni della metà de' lati b, a, c; e perciò i doppj degli archi corrispondenti alle metà di tali logaritmi, dinoteranno i lati b, a, c, che si cercano.

85. Dall' equazioni enunciate ne' numeri precedenti, si ricava potersi con facilità ottenere la soluzione di un triangolo sferico qualunque. Per rendere familiari l' esposte teorie conviene procedere alla pratica della soluzione del triangolo sferico, coll' ajuto de' logaritmi, in tutte le sei diverse combinazioni.

SEZIONE VII.

PRATICA DELLA RISOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO RETTANGOLO COLL' AJUTO DE' LOGARITMI.

86. *Prima combinazione di dati.*

Nel triangolo sferico BAC, rettangolo in A (fig. 6) sieno noti l' ipotenusa BC di 61°. 18', ed il cateto AB di 23°. 32', Esprimasi con R il seno massimo. Si determini l' angolo ACB. Essendo pel num. 43. Sen BC : Sen AB :: Sen R : Sen ACB, ed il caso non essendo dubbio, dal perchè $AB + BC = 84°. 50'$, è minore di 180° (n. 41) e l' angolo in C è opposto al lato minore. Sarà perciò

$$\text{Sen } ACB = \frac{\text{Sen } AB \times R}{\text{Sen } BC}$$

Adunque Log Sen AB di	23°. 32'	=	9 . 60128
Log Sen R		= +	10
Somma		=	19 . 60128
Log Sen BC di	61 . 18	= −	9 . 94307
Log Sen ACB di	27 . 4 . 42"	=	9 . 65821

Si determini l' angolo ABC. Per l' equazione 3 del n. 47

$$\text{Cos } ABC = \frac{\text{Tang } AB \times R}{\text{Tang } BC}.$$

Adunque Log Tang AB di 23°. 32' = 9. 63899
Log Tang BC di 61 . 18 = —10. 26163

Log Cos ABC di 76 . 12'. 21"= 9. 37736

Si avverte, che per brevità di calcolo si è omesso il seno massimo, potendosi questo supplire col supporre la caratteristica del logaritmo seno AB accresciuta di una decina.

Si determini AC per l' equazione 3ª del num. 52

$$\text{Cos}\, AC = \frac{R \times \text{Cos}\, BC}{\text{Cos}\, AB}$$

Adunque Log Cos BC di 61°. 18' = 9. 68144
Log Cos AB di 23 . 32 = — 9. 96229

Log Cos AC di 58 . 24 . 48"= 9. 71915

87. *Seconda combinazione.* Sieno dati l' ipotenusa BC di 61° 18', e l' angolo obbliquo ACB di 27° 4' 42".

Si determina AB essendo minore di 180° la somma dell' angolo retto insieme coll' angolo C, sarà il lato AB, opposto a quest' ultimo, minore di 90° (n. 41. 2). Ed essendo R : Sen ACB :: Sen BC : Sen AB

$$\text{sarà Sen}\, AB = \frac{\text{Sen}\, CB \times \text{Sen}\, ACB}{R}$$

Adunque Log Sen BC di 61°. 18' = 9. 94307
Log Sen ACB di 27°. 4'. 42" = + 9. 65821

Log Sen AB di 23°. 32' = 9. 60128

Si avverte, che il logaritmo seno R si è tolto col non segnare la decina nella caratteristica della somma de' due logaritmi.

Si determini AC, pel n. 46 R : Tang BC :: Cos BCA : Tang AC

$$\text{Tang}\, AC = \frac{\text{Tang}\, BC \times \text{Cos}\, BCA}{R}$$

Adunque Log Tang BC di 61°. 18' = 10. 26163
Log Cos BCA di 27 . 4 . 42" = + 9. 94958

Log Tang AC di 58°. 24. 48" = 10. 21121

Si determini ABC, pel n. 61 R : Tang ACB :: Cos BC : Cot : ABC

sarà $\text{Cot } ABC = \frac{\text{Tang } ACB \times \text{Cos } BC}{R}$

Adunque Log. Tang ACB	di 27°. 4'. 42"	=	9. 70863
Log Cos BC	di 61 . 18	= +	9. 68144
Log Cot ABC	di 76°. 12'. 21"	=	9. 39007

88. *Terza combinazione*. Sieno dati i lati AB di 23° 32', e l'angolo opposto ACB di 27°. 4'. 42" si determini BC.

Per le ragioni anzidette nel num.° precedente, l'ipotenusa BC dovendo essere minore di 90°, sarà per l'equazione 4ª del num. 43.

$$\text{Sen } BC = \frac{\text{Sen } AB \times R}{\text{Sen } ACB}$$

Adunque Log Sen AB	di 23°. 32'	=	9. 60128
Log Sen ACB	di 27 . 4'. 42"	= −	9. 65821
Log Sen BC	di 61 . 18	=	9. 94307

Si determini AC, per l'equazione 3ª del num. 49.

$$\text{Sen } AC = \frac{R \times \text{Tang } AB}{\text{Tang } ACB}$$

Adunque Log Tang AB	di 23°. 32'	=	9. 63899
Log Tang ACB	di 27 . 4 . 42"	= −	9. 70863
Log Sen AC	di 58 . 24 . 48	=	9. 93036

Si determini l'angolo ABC, per l'equazione 2ª del num. 57.

$$\text{Tang } ABC = \frac{R \times \text{Cot } ACB}{\text{Cos } BC}$$

Adunque Log Cot ACB	di 27°. 4'. 42"	=	10. 29137
Log Cos. BC	di 61 . 18 .	= −	9. 68144
Log Tang ABC	di 76 . 12 . 21	=	10. 60993

89. *Quarta combinazione*. Sieno dati l'angolo ACB di 27°. 4'. 42", ed il lato adjacente AC di 58°. 24'. 48"

Si determini BC. Essendo pel num. 46.

Cos BCA : Tang AC :: R : Tang BC sarà

$$\text{Tang } BC = \frac{\text{Tang } AC \times R}{\text{Cos } BCA}$$

Adunque Log Tang AC di 58°. 24'. 48" = 10. 21121
Log Cos BCA di 27 . 4 . 42 = − 9. 94958

Log Tang BC di 61 . 18 . = 10. 26163

Si determini AB, per l'equazione 1ª del num. 49.

$$\text{Tang } AB = \frac{\text{Tang } ACB \times \text{Sen } AC}{R}$$

Adunque Log Tang ACB di 27°. 4'. 42" = 9. 70863
Log Sen AC di 58 . 24 . 48 = + 9. 93036

Log Tang AB di 23 . 32 = 9. 63899

Si determini ABC, pel num. 53 R : Sen ACB :: Cos CA : Cos ABC

$$\text{Sarà Cos } ABC = \frac{\text{Sen } ACB \times \text{Cos } CA}{R}$$

Adunque Log Sen ACB di 27°. 4'. 42" = 9. 65821
Log Cos AC di 58 . 24 . 48 = + 9. 71915

Log Cos ABC di 76 . 12 . 21 = 9. 37736

90. *Quinta combinazione*. Sieno dati i due cateti AB di 23° 32', ed AC di 58° 24' 48".

Si determini BC, per l'equazione 1ª del num. 52.

$$\text{Cos } BC = \frac{\text{Cos } AC \times \text{Cos } AB}{R}$$

Adunque Log Cos AC di 58°. 24'. 48" = 9. 71915
Log Cos AB di 23 . 32 = + 9. 96229

Log Cos BC di 61 . 18 = 9. 68144

Si determini ACB, per l'equazione 2ª del num. 49.

$$\text{Tang } ACB = \frac{R \times \text{Tang } AB}{\text{Sen } AC}$$

Adunque Log Tang AB di 23°. 32′ = 9. 63899
Log Sen AC di 58 . 24 . 48″ = — 9. 93036

Log Tang ACB di 27 . 4 . 42 = 9. 70863

Si determini ABC, essendo pel num. 48.

Sen AB : Tang AC :: R : Tang ABC sarà

$$\text{Tang } ABC = \frac{\text{Tang } AC \times R}{\text{Sen } AB}$$

Adunque Log Tang AC di 58°. 24′. 48″= 10. 21120
Log Sen AB di 23 . 32 . 32 = — 9. 60128

Log Tang ABC di 76°. 12′. 21″= 10. 60992

91. *Sesta combinazione.* Sieno dati gli angoli obbliqui ACB di 27°. 4′. 42″, ed ABC di 76°. 12′. 21″.

Si determini BC, per l'equazione 3ª del num. 57.

$$\text{Cos } BC = \frac{R \times \text{Cot } AOB}{\text{Tang } ABC}$$

Adunque Log Cot ACB di 27°. 4′. 42″= 10. 29137
Log Tang ABC di 76 . 12 . 21 = — 10. 60993

Log Cos BC di 61 . 18 = 9. 68144

Si determini AB, per l'equazione 2ª del num. 54.

$$\text{Cos } AB = \frac{R \times \text{Cos } ACB}{\text{Sen } ABC}$$

Adunque Log Cos ACB di 27°. 4′. 42″= 9. 94958
Log Sen ABC di 76 . 12 . 21 = — 9. 98729

Log Cos AB di 23 . 32 = 9. 96229

Si determina in fine AC di 58°. 24′. 48″, risolvendo l'equazione

$$\text{Cos } AC = \frac{R \times \text{Cos } ABC}{\text{Sen } ACB}$$

SEZIONE VIII.

PRATICA DELLA SOLUZIONE DEL TRIANGOLO SFERICO OBBLIQUANGOLO COLL' AJUTO DE' LOGARITMI.

92. Sia BAC (fig. 12 n. 1) il triangolo sferico obbliquangolo da risolversi, secondo tutte le diverse combinazioni; e pel vertice dell'angolo ABC di esso, si faccia passare l'arco BD di cerchio massimo, perpendicolare ad AC, che per tutti gli esempj da esibirsi s'intenda cadere dentro il triangolo esposto.

93. *Prima combinazione.* Sieno dati i lati AB di 65°. 35', BC di 42°. 38', e BCA di 54°. 25'.

Si determini l'angolo BAC.

Poichè la somma de' lati AB, BC = 108°. 13', è minore di 180°, debba essere acuto l'angolo BAC, opposto al lato minore (num. 41), e perciò per l'equazione 1ª del num. 44.

$$\text{Sen } BAC = \frac{\text{Sen } BC \times \text{Sen } BCA}{\text{Sen } AB}$$

Adunque Log Sen BC di 42°. 38' = 9. 83078
Log Sen BCA di 54 . 25 = + 9. 91023

Somma . . . . . = 19. 74101

Log Sen AB di 65 . 35 = − 9. 95931

Log Sen BAC di 37 . 13 . 25 = 9. 78170

Si determini AC

Poichè $AC = AD + DC$ nel supposto caso, l'è chiaro che nota l'ipotenusa BC del triangolo rettangolo BCD, ed è noto pure l'angolo BCD di esso; per l'equazione 1ª del n. 47 $\text{Tang } DC = \frac{\text{Tang } BC \times \text{Cos } BCD}{R}$

E per l'equazione 4ª del num. 68 $\text{Cos } AD = \frac{\text{Cos } AB \times \text{Cos } DC}{\text{Cos } BC}$.

Adunque Log Tang BC di 42°. 38' = 9. 96408
Log Cos BCD di 54 . 25 = + 9. 76484

Log Tang DC di 28 . 10 . 40' = 9. 72892

$$
\begin{array}{lr}
\text{Log Cos } AB \text{ di } 65°.\ 35' = & 9.\ 61634 \\
\text{Log Cos } DC \text{ di } 28.\ 10.\ 40'' = + & 9.\ 94522 \\
\hline
\text{Somma} \ldots\ldots = & 19.\ 56156 \\
\text{Log Cos } BC \text{ di } 42.\ 38. = - & 9.\ 86670 \\
\hline
\text{Log Cos } AD \text{ di } 60.\ 18.\ 40 = & 9.\ 69486
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
DC = & 28°.\ 10'.\ 40'' \\
AD = + & 60.\ 18.\ 40 \\
\hline
AC = & 88.\ 29.\ 20
\end{array}
$$

Si avverte, che nel caso del num.° 2 della fig.12 $AC = AD - DC$. Si determini l'angolo ABC.

Poichè l'angolo $ABC = ABD + DBC$; quindi nel triangolo BDC, nota l'ipotenusa BC, e noto l'angolo BCD, per l'equazione 2ª del num. 57 Tang $DBC = \frac{R \times \text{Cot } DCB}{\text{Cos } BC}$, e per l'equazione 4ª del n. 66

$$\text{Cos } ABD = \frac{\text{Cos } CBD \times \text{Tang } BC}{\text{Tang } AB}$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{Adunque Log Cot } DCB \text{ di } 54°.\ 25' = & 9.\ 85460 \\
\text{Log Cos } BC \text{ di } 42.\ 28 = - & 9.\ 86670 \\
\hline
\text{Log Tang } CBD \text{ di } 44.\ 12.\ 8'' = & 9.\ 98790 \\
\hline
\text{Log Cos } DBC \text{ di } 44.\ 12.\ 8 = & 9.\ 85545 \\
\text{Log Tang } BC \text{ di } 42.\ 38 = + & 9.\ 96408 \\
\hline
\text{Somma} = & 19.\ 81953 \\
\text{Log Tang } AB \text{ di } 65.\ 35 = - & 10.\ 34297 \\
\hline
\text{Log Cos } ABD \text{ di } 72.\ 33.\ 58 = & 9.\ 47656
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
CBD = & 44°.\ 12'.\ 8'' \\
+\ ABD = & 72.\ 33.\ 58 \\
ABC = & 116.\ 46.\ 6
\end{array}
$$

Nel caso poi del num.2 della fig.12 $ABC = ABD - DBC$.

94. *Seconda combinazione.* Sieno dati AB di 65°. 35' AC di 88°. 29'. 20", e l'angolo BAC di 37°. 13'. 25", compreso da tali lati.

Si determini BC. Poichè $BA + AC$ è minore di 180°, sarà BCA minore di 90°; e perciò la perpendicolare BD cade dentro.

Nel triangolo rettangolo ADB, essendo noti l'ipotenusa AB, e l'angolo BAD, si avrà coll'equazione 1ª del num. 47.

$\text{Tang}\, AD = \frac{\text{Tang}\, AB \times \text{Cos}\, BAD}{R}$, e quindi $DC = AC - AD$ avvertendo, che nel caso del num. 2 della fig. 12 $DC = AD - AC$.

Adunque	Log Tang AB di 65°. 35'.	$=$	10. 34297
	Log Cos BAD di 37 . 13 . 25"	$+$	9. 90106
	Log Tang AD di 60 . 18 . 40	$=$	10. 24403

$AC =$ 88°.29'.20"
$AD =$ —60 .18.40
$DC =$ 28 .10.40 E per l'equazione prima del num. 68 $\text{Cos}\, BC = \frac{\text{Cos}\, DC \times \text{Cos}\, AB}{\text{Cos}\, AD}$

Adunque	Log Cos DC di 28°. 10'. 40"	$=$	9. 94522
	Log Cos AB di 65 . 35 .	$=+$	9. 61634
	Somma . .	$=$	19. 56156
	Log Cos AD di 60 . 18 . 40	$=$	9. 69486
	Log Cos BC di 42 . 38	$=$	9. 86670

Si determini BCA

Per l'equazione 3ª del num. 67 $\text{Tang}\, BCA = \frac{\text{Sen}\, AD \times \text{Tang}\, BAC}{\text{Sen}\, CD}$

Adunque	Log Sen AD di 60°. 18'. 40"	$=$	9. 93888
	Log Tang BAC di 37 . 13 . 25	$= +$	9. 88065
	Somma . .	$=$	19. 81953
	Log Sen CD di 28 . 10 . 40	$= -$	9. 67413
	Log Tang BCA di 54 . 25 .	$=$	10. 14540

Procedendo come nella prima combinazione, si avrà $ABC =$ 116°. 40'. 6".

95. *Terza combinazione*. Sieno dati l'angolo *BAC* di 37°. 13'. 25", l'angolo *BCA* di 54°. 25', ed *AB* di 65°. 35' lato opposto ad uno degli angoli dati

Si determini *BC*

Perchè $BCA + BAC$ è minore di 180°, perciò *BC* opposto all'angolo minore, è più piccolo dell'arco di quadrante (n. 41) Quindi per l'equazione 4ª del num. 43.

$$\text{Sen } BC = \frac{\text{Sen } BAC \times \text{Sen } AB}{\text{Sen } BCA}$$

Adunque Log Sen *BAC* di 37°. 13'. 25"	=	9. 78170
Log Sen *AB* di 65 . 35 .	= +	9. 95931
Somma . .	=	19. 74101
Log Sen *BCA* di 54 . 25 .	= −	9. 91023
Log Sen *BC* di 42 . 38 .	=	9. 83078

Si determini *AC*.

Nel triangolo rettangolo *BAD*, essendo noti l'ipotenusa *AB*, e l'angolo obbliquo *BAD*, si avrà l'equazione 1ª del num. 47 $\text{Tang } AD = \frac{\text{Tang } AB \times \text{Cos } BAD}{R}$, e coll'equazione seconda del num. 68 $\text{Sen } CD = \frac{\text{Tang } BAC \times \text{Sen } AD}{\text{Tang } BCD}$

Adunque Log Tang *AB* di 66°. 35'	=	10. 34297
Log Cos *BAD* di 37 . 13 . 25'	= +	9. 90106
Log Tang *AD* di 60 . 18 . 40	=	10. 24403
Log Tang *BAD* di 37 . 13 . 25	=	9. 88065
Log Sen *AD* di 60 . 18 . 40	= +	9. 93868
Somma . .	=	19. 81953
Adunque Log Tang *BCD* di 54 . 35	= −	10. 14540
Log Sen *CD* di 28 . 10 . 40	=	9. 67413

AD =		60°. 18'. 40"
DC =	+	28 . 10 . 40
AC =		88 . 29 . 20

Si determini ABC.

L'angolo $ABC = ABD + CBD$. Or nel triangolo rettangolo ABD, essendo noti l'ipotenusa AB, e l'angolo obbliquo BAC, per l'equazione 1ª del n. 57. Cot $ABD = \frac{\text{Tang } BAD \times \text{Cos } AB}{R}$, e poi per l'equazione 3ª del num. 71. Sen $CBD = \frac{\text{Cos } BCA \times \text{Sen } ABD}{\text{Cos } BAC}$.

Adunque Log Tang BAD di 37°. 13'. 25"	=	9. 88065
Log Cos AB di 65 . 35	+	9. 61634
Log Cot ABD di 72 . 33 . 58	=	9. 49699
Log Cos BCA di 54 . 25 .	=	9. 76484
Log Sen ABD di 72 . 33 . 58	=+	9. 97957
Somma	=	19. 74441
Log Cos BAC di 37 . 13 . 25	=−	9. 90106
Log Sen CBD di 44 . 12 . 8	=	9. 84335

$ABD =$ 72°. 33'. 58"
$CBD = +$ 44 . 12 . 8
$ABC =$ 116 . 46 . 6

Nel caso del num. 2 della fig. 12 $ABC = ABD - CBD$

Determinato l'angolo ABD, si osserva se questo risulta maggiore, o minore di ABC, poichè nel primo caso la perpendicolare BD caderà fuori del triangolo, ed allora $CBD = ABD - ABC$, e nel secondo caso caderà dentro, e l'angolo $CBD = ABC - ABD$.

96. *Quarta combinazione.* Sieno dati i due angoli CAB di 37°. 13'. 25" CBA di 116°. 46'. 6", ed il lato adjacente AB di 65°. 35, adjacenti a due angoli.

Si determini BC.

Per l'equazione 1 del num 57 Cot $ABD = \frac{\text{Tang } BAD \times \text{Cos } AB}{R}$

$DBC = ABC - ABD$; quindi per l'equazione 3ª del num. 66

$$\text{Tang } BC = \frac{\text{Cos } ABD \times \text{Tang } AB}{\text{Cos } CBD}.$$

Adunque Log Tang BAD di $37^{\circ}.\ 13'.\ 25'' =$ 9. 88065
Log Cos AB di $65\ .\ 35\ . \quad = +$ 9. 61634

Log Cot ABD di $72\ .\ 23\ .\ 58'' =$ 9. 49699

$ABC = 116^{\circ}.\ 46'.\ 06''$
$ABD = -\ 72\ .\ 33\ .\ 58$

$DBC = \quad 44\ .\ 12\ .\ 08$

Log Cos ABD di $72^{\circ}.\ 33'.\ 58'' =$ 9. 47656
Log Tang AB di $65\ .\ 35\ . \quad = +$ 10. 34297

Somma . . = 19. 81953
Log Cos DBC di $44\ .\ 12\ .\ 8 = -$ 9. 85545

Log Tang BC di $42^{\circ}.\ 38\ . \quad =$ 9. 96408

Operando, come nella prima combinazione num. 93, si determinerà AC di $88^{\circ}.\ 29'.\ 20''$

Si determini in fine ACB

Per l'equazione 1ª del num. 69 $\text{Cos}\, BCA = \dfrac{\text{Sen}\, DBC \times \text{Cos}\, BAC}{\text{Sen}\, ABD}$

Adunque Log Sen DBC di $44^{\circ}.\ 12'.\ 8'' =$ 9. 84335
Log Cos BAC di $37\ .\ 13\ .\ 25 = +$ 9. 90106

Somma . . . = 19. 74441
Log Sen ABD di $72\ .\ 33\ .\ 52 = -$ 9. 97957

Log Cos BCA di $54\ .\ 25 \quad =$ 9. 76484

97. *Quinta combinazione.* Sieno dati tutti i lati del triangolo ABC, e sia AB di $65^{\circ}.\ 35'$, BC di $42^{\circ}.\ 38'$, ed AC di $88^{\circ}.\ 29'.\ 20''$.

Si determini l'angolo BAC

Pel num. 74 $\text{Cot}\, \dfrac{AB + BC}{2} : \dfrac{\text{Tang}\, AB - BC}{2} :: \text{Cot}\, \tfrac{1}{2} AC : \text{Tang}\, \dfrac{AD - DC}{2}$. Sarà $\dfrac{AB + BC}{2} = 54^{\circ}.\ 6'.\ 30''$; $\dfrac{AB - BC}{2} = 11^{\circ}.\ 28'.\ 30''$, e $\tfrac{1}{2} AC = 44^{\circ}.\ 14'.\ 40''$.

Nel caso del num. 2 della fig. 12 si procede come nell' ultima parte del num. 74.

Adunque Log Tang $\frac{AB-BC}{2}$ di 11°. 28'. 30" = 9. 30748

Log Cot $\frac{1}{2}$ AC di 44 . 14 . 40 = + 10. 01146

Somma . . . = 19. 31894

Log Cot $\frac{AB+BC}{2}$ di 54 . 6 . 30 = − 9. 85954

Log Tang $\frac{AD-DC}{2}$ di 16.. 4 = 9. 45940

$\frac{1}{2}$ AC = 44°. 14'. 40"

$+\frac{AD-DC}{2}$ = ± 16 . 4

AD = 60 . 18 . 40

CD = 28 . 10 . 40

E per l' equazione 3ª del num. 47 $\text{Cos } BAD = \frac{R \times \text{Tang } AD}{\text{Tang } AB}$

Adunque Log Tang AD di 60°. 18'. 40 = 10. 24403

Log Tang AB di 65 . 35 = −10. 34297

Log Cos BAD di 37 . 13 . 52 = 9. 90106

L' istesso risultato si ottiene, e con più facilità, risolvendo l' equazione 2ª del n. 78. Di fatti

Log Sen AB di 65°. 35' = 9. 95931

Log Sen AC di 88 . 29 . 20 = + 9. 99985

BC di 42 . 38 Som. = −19. 95916

Somma = 196 . 42 . 20

Semisomma = 98 . 21 . 10

Log Sen $\frac{1}{2}$ $S-AB$ = 32 . 46 . 10 = 9. 73340

Log $\frac{1}{2}$ $S-AC$ = 9 . 51 . 50 = + 9. 23377

Log Sen R^2. . . . . +20

Somma . . . . . = 38. 96717

Log Sen $\frac{1}{2}$ A^2 . . . . = 19. 00801

Log Sen $\frac{1}{2}$ A di 18°. 36'. 42". 30 = 9. 50400

Il doppio per l' angolo A di 37°. 13'. 25". 00, ch' è identico col risultato ottenuto dal metodo precedente.

Si avverte, che facendosi uso de' complementi aritmetici per le quantità logaritme da sottrarsi, la calcolazione riesce più semplice, ed espedita.

Di fatti $AB =$ 65°. 35' Compl. arit. Sen. Log 0. 04069
$AC =$ 88 . 29 . 20 Compl. arit. Sen. Log $= +$ 0. 00015
$BC =$ 42 . 38

Somma $=$ 196 . 42 . 20
Semisomma $=$ 98 . 21 . 10
$\frac{1}{2}\ S - AB =$ 32 . 46 . 10 Sen Log $= +$ 9. 73340
$\frac{1}{2}\ S - AC =$ 9 . 51 . 50 Sen Log $= +$ 9. 23377

Somma pel Log Sen $\frac{1}{2}\ A^2$ $=$ 19. 00801
Semisomma pel Log Sen $\frac{1}{2}\ A$ di 18°. 36 . 42 . 30 $=$ 9. 50400

Il doppio per l'angolo ABC di 37 . 13 . 25 . 00.

Procedendo nell' istesso modo, risolvendo l' equazione 1ª e 3ª del num. 78, si determineranno i rimanenti angoli ABC e BCA.

98. *Sesta combinazione*. Sieno dati tutti gli angoli del triangolo, cioè ABC di 116°. 46'. 6", BCA di 54°. 25, e BAC di 37°. 13'. 25".

Si determini il lato AB.

Essendo per l' equazione del num. 82 Tang $\frac{ABD - CBD}{2} =$

$$\frac{\text{Tang}\ \frac{BAD - BCD}{2} \times \text{Tang}\ \frac{1}{2}\ B}{\text{Cot}\ \frac{BAD + BCD}{2}}$$

Quindi determinata $\frac{ABD - CBD}{2}$, ed aggiunta alla metà di ABC, si avrà ABD. Indi nel triangolo rettangolo BAD, essendo noti i due angoli obbliqui, si potrà ottenere l' ipotenusa AB coll' equazione 3ª del num. 57.

$$\text{Cos}\ AB = \frac{R \times \text{Cot}\ ABD}{\text{Tang}\ BAD}$$

Adunque Log Tang $\frac{BAD - BCD}{2} =$ 8.° 35 . 47 $=$ 9. 17957
Log Tang $\frac{1}{2}\ ABC$ $=$ 58 . 23 . 3 $= +$ 10. 21072
Somma . . . $=$ 19. 39029

$$\text{Log Tang } \frac{BAD+BCD}{2} = 45^\circ.\ 49'.\ 12''.\ 30''' = \quad 9.\ 98757$$

$$\text{Log Tang } \frac{ABD-CBD}{2} = 14.\ 10.\ 55 \quad = \quad 9.\ 40272$$

$$\tfrac{1}{2}\ ABC \quad = 58^\circ.\ 23'.\ 3''$$

$$+ \frac{ABD-CBD}{2} = 14.\ 10.\ 55$$

$$ABD \quad = 72.\ 33.\ 55$$

$$\text{Log Cot } ABD \text{ di } 72^\circ.\ 33'.\ 58'' = \quad 9.\ 49699$$

$$\text{Log Tang} BAD \text{ di } 37.\ 13.\ 25 \ = -\ 9.\ 88065$$

$$\text{Log Cos } AB \text{ di } 65.\ 35 \quad = \quad 9.\ 61634$$

Nel caso poi del num. 2 della fig. 12, coll'equazione del num. 81, si determina prima $\frac{ABD+CBD}{2}$ la quale aggiunta alla metà di ABC, si otterrà ABD, quindi operando come sopra si otterrebbe il valor numerico di AB, e poscia quelli di BC e di AC.

L'istesso risultato si conseguirebbe, e con più facilità, risolvendo l'equazione 3ª del num. 48. Di fatti

$$\text{Cos } \tfrac{1}{2}\ AB^2 = \frac{\text{Cos } \tfrac{1}{2} S - A \times \text{Cos } \tfrac{1}{2} S - B \times R^2.}{\text{Sen } A \times \text{Sen } B}$$

Adunque Log Sen BAC di $37^\circ.\ 13'.\ 25''$. . . . . = 9. 78170
Log Sen ABC di $116.\ 46.\ 6$ . . . . . = + 9. 95078

BCA di $54.\ 25$ Somma = − 19. 73248

Somma = 208. 24. 31
Semisomma = 104. 12. 15

Log Cos $\tfrac{1}{2} S - A$. di 66. 58. 50 = 9. 59223
Log Cos $B - \tfrac{1}{2} S$. di 12. 33. 51 = 9. 98947
Log Sen R^2 . . . . = 20.

Somma . . . . = 39. 58170

Log Cos $\tfrac{1}{2} AB^2$ . . . . = 19. 84922
La metà pel Log Cos $\tfrac{1}{2} AB$ di $32^\circ.\ 47'.\ 30''$. = 9. 92461
Il doppio per il lato $AB = 65.\ 35$.

Facendo uso de' complementi aritmetici, il calcolo riesce più espedito. Di fatti

$BAC = 37^\circ.\ 13'.\ 25''$ Compl. *Ar* Log Sen $=$ 0. 21830
$ABC = 116.\ 46.\ 6$ Compl. *Ar* Log Sen $= +$ 0. 04922
$ACB = 54.\ 25$

Somma $= 208.\ 24.\ 31$
Semisomma $= 104.\ 12.\ 15$
$\frac{1}{2}\ S - A = 66.\ 58.\ 50$ Log Cos . . . . . . $= +$ 9. 59223
$B - \frac{1}{2}\ S = 12.\ 35.\ 51$, Log Cos . . . . . . $= +$ 9. 98947

Log Cos $\frac{1}{2}\ AB^2$ . . . . $=$ 19. 84922
La metà pel Log Cos $\frac{1}{2}\ AB$ di $32^\circ.\ 47'.\ 30$ $=$ 9. 92461
2
Il doppio pel lato AB di $65.\ 35.\ 00$

Risolvendo nell'istesso modo l'equazione 1ª e 2ª del num. 84 si determineranno colla stessa facilità, i rimanenti due lati AC di $88^\circ.\ 29'.\ 20''$ e BC di $42^\circ.\ 38$.

ERRATA			CORREZIONE
Pagina	Verso		
5	4	principali, de' lati	principali de' lati
14	6	*BCA*	*DCA*
»	16	*DAC*	*DAB*
16	10	*AD*	*AC*
»	11	*AC*	*AD*
19	23	Lang	Tang
23	13	ceschi	caschi
27	5	$\frac{\frac{1}{2} R \times 2 \text{Cos} A \times \text{Cos} B}{R}$	$\frac{\frac{1}{2} R \times 2 \text{Cos} A \times \text{Cos} B}{R}$
«	6	$\frac{\frac{1}{2} R \times 2 \text{Sen} A \times \text{Sen} B}{R}$	$\frac{\frac{1}{2} R \times 2 \text{Sen} A \times \text{Sen} B}{R}$
«	16	denomitori	denominatori
35	10	oterrà	otterrà
38	18	18 . 24 . 48	18 . 24 . 45

Trigonometria Sferica
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 6
Fig 7
Fig 8
Fig 9
Fig 11
Fig 12. II
Calc. della Ana Sicilia